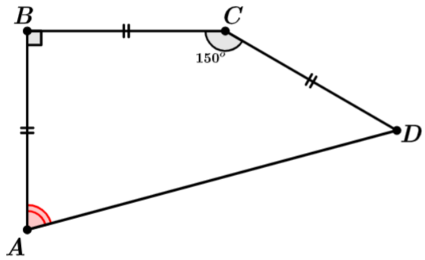
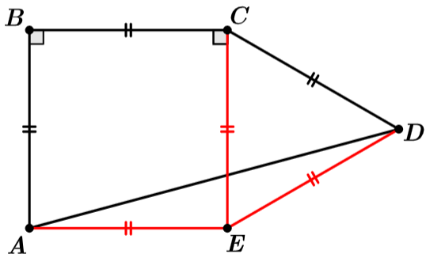
Решения

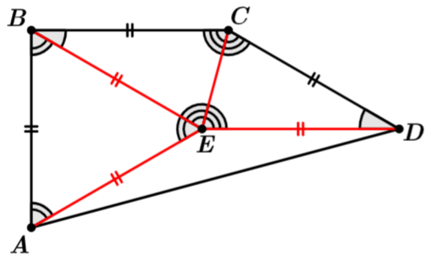
№ 1. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD$, $AB \perp BC$ и $\angle C = 150^o$. Найдите угол BAD.



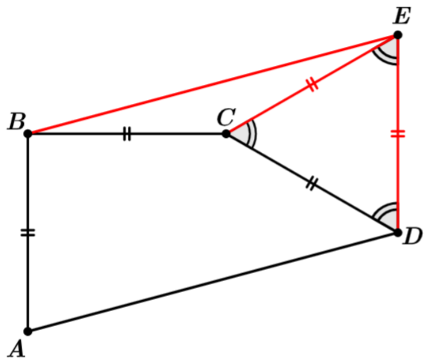
Ответ. $\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}+2) = \operatorname{arcctg}(2-\sqrt{3}) = 75^o$.



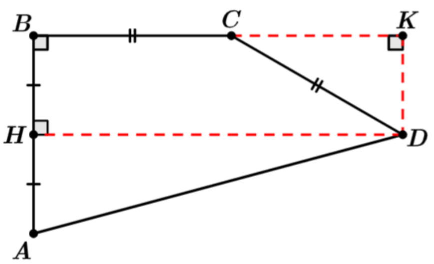
Первое решение. Сделаем дополнительное построение: Достроим треугольник ABC до квадрата $ABCE$.(рис.1.) Заметим, что треугольник CDE равносторонний, так как $CE = CD$ и $\angle ECD = 60^o$. Также заметим равнобедренность треугольника AED и $\angle AED = 150^o$. Отсюда следует, что $\angle EAD = \angle EDA = 15^o$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BED = 75^o$.



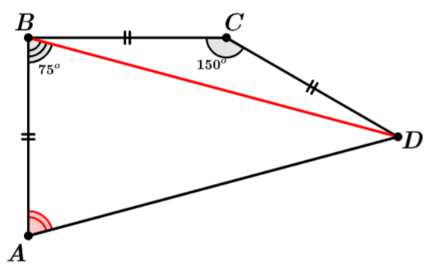
Второе решение. Сделаем дополнительное построение: Возьмем точку внутри четырехугольника $ABCD$ так, что треугольник ABE - равносторонний.(рис.2.) Тогда из равнобедренности треугольника BEC следует, что $\angle BEC = 75^o$. Заметим, что треугольники BCE и DCE равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда треугольник AED является равнобедренным и получим, что $\angle EAD = 15^o$. Следовательно, $\angle BAD = 75^o$.



Третье решение. Сделаем дополнительное построение: Достроим треугольник ABD до параллелограмма $ABED$. (рис.3.) Поскольку $CD = DE$ и $\angle ECD = 60^o$ треугольник CED является равносторонним. Тогда треугольник BCE является равнобедренным, а значит $\angle CBE = \angle CEB = 15^o$. Откуда следует, что $\angle BED = 75^o$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BED = 75^o$.



Четвертое решение. Поскольку треугольник BCD равнобедренный получим $\angle DBC = \angle CDB = 15^o$,откуда $\angle ABD = 75^o$. Опустим перпендикуляры DH и DK из точки D на прямые AB и BC соответственно. Введем обозначения $AB = BC = CD = 2x$ и $\angle BAD = \alpha$. Тогда $KD = \frac{1}{2}CD = x$. Так как $HBKD$ прямоугольник, имеем $BH = KD = x$, отсюда следует, что $HD = x$. Так как высота HD является и медианой, то треугольник ABD -равнобедренный. Следовательно, $\angle ABD = \angle BAD = 75^o$.



Пятое решение. Поскольку треугольник BCD равнобедренный получим $\angle DBC = 15^o$,откуда $\angle ABD = 75^o$. Пусть $BC = AB = CD = x$. Применяя теорему косинусов для треугольника BCD получим $BD = x\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Еще раз применяя теорему косинусов для треугольника ABD получим $AD = x\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Следовательно, треугольник ABD - равнобедренный, откуда следует, что $\angle BAD = \angle ABD = 75^o$.

Возможны и другие способы решения.

№ 2. Каждую сторону треугольника на рисунке разбили на три равные части. Какую часть его площади составляют закрашенная часть?

Ответ. $\frac{1}{7}$.

Решение. Расмотрим треугольник ABC, площадь которого равна 1. Проведем чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 так, что $AC_1 \cap C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1$. И пусть чевины AA_1 и CC_1 пересекаются в точке N, чевианы BB_1 и AA_1 пересекаются в точке K , а чевианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Через точку B проведём прямую, параллельную AC, и продолжим AA_1 до пересечения с этой прямой в точке T. Треугольники BA_1T и CA_1A подобны с коэффициентом 2. Поэтому $BT = 2AC = 6AB_1$. Из подобия тре- угольников BKT и B_1KA находим, что $\frac{BK}{KB_1} = \frac{BT}{AB_1} = 6$ Поэтому $S_{\triangle AB_1K} = \frac{1}{7}S_{\triangle ABB_1} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{21}$. Аналогично находим, что $S_{\triangle BMC_1} = S_{\triangle CNA_1} = \frac{1}{21}$. Следовательно,

$$S_{\triangle MNK} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABB_1} - S_{\triangle BCC_1} - S_{\triangle CAA_1} + S_{\triangle AKB_1} + S_{\triangle BMC_1} + S_{\triangle CNA_1} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7}.$$

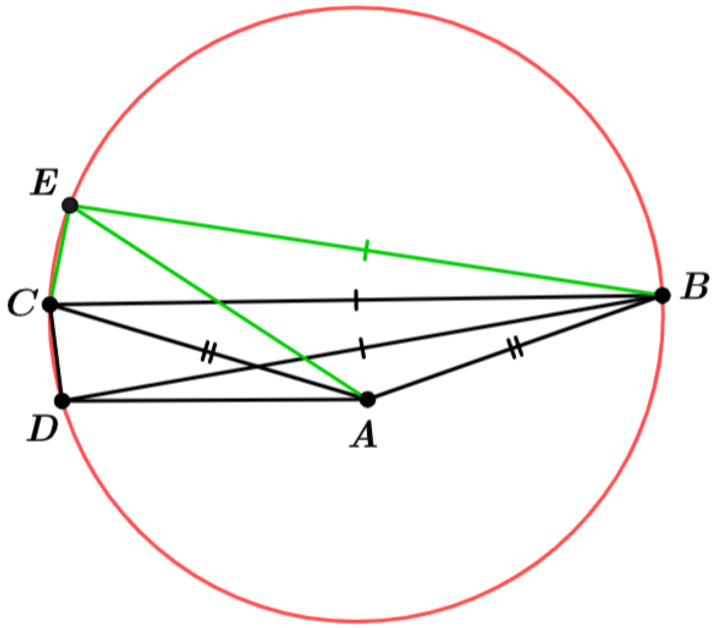
№ 3. $ABCD$ — трапеция $BC \parallel AD$. Найдите длину стороны CD, если известно, что $CD < 1$, $BC = BD = 1, AB = AC$ и $\angle BAC + \angle BDC = 180^o$.

Ответ. $CD = \sqrt{2} - 1$.

Первое решение. Из условия следует, что $BC > AD$. Пусть $\angle BDC = 2\alpha$, тогда $\angle BAC = 180^o - 2\alpha$. Поскольку треугольники BAC и DBC равнобедренные имеем $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$ и $\angle BDC = \angle BCD = 2\alpha$. Опустим высоты DK и AH. Тогда $DK = BD\sin 4\alpha = \sin 4\alpha$, $CD = \frac{DK}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha$ и $AB = \frac{AH}{\sin\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos\alpha\cos 2\alpha$. Далее применив теорему косинусов для треугольника ABC получим, что $32\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha(1+\cos 2\alpha) = 1$. Тогда

$$32\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha(1+\cos 2\alpha) = 1 \iff 16\cos^2 2\alpha(1+\cos 2\alpha)^2 = 1 \iff 4\cos 2\alpha(1+\cos 2\alpha) = 1 \iff (2\cos 2\alpha + 1)^2 = 2$$

откуда следует, что $CD = 2\cos 2\alpha = \sqrt{2} - 1 < 1$.



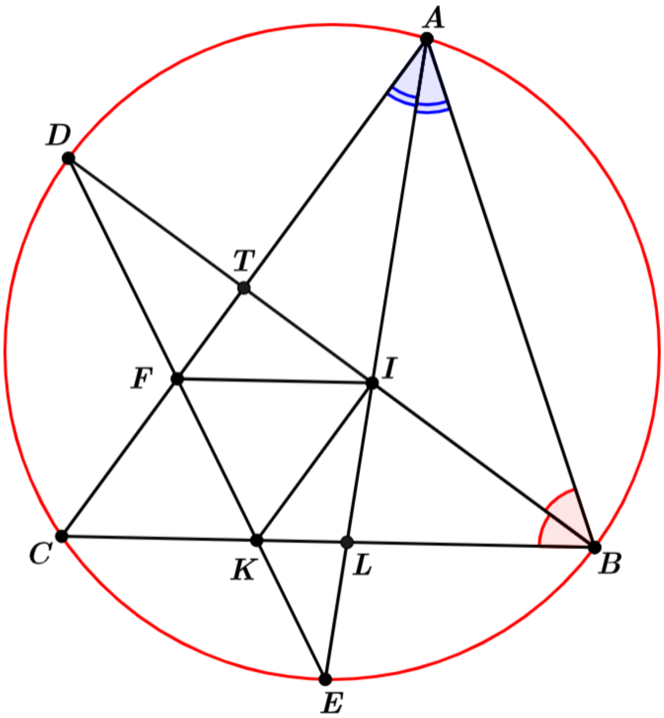
Второе решение. Пусть точка E симметрична точке D относительно BC. Тогда четырехугольник $ABEC$ является вписанным, так как $\angle BAC + \angle BEC = \angle BAC + \angle BDC = 180^o$. Поскольку $AD \parallel BC$ получим $AF = FE$, где F - точка пересечения EA и BC. Так как $AB = AC$, то $\angle BEF = \angle FEC$ и $FC : BF = EC : BE = EC$. Пусть $AF = FE = m$, $AB = AC = n$ и $DC = EC = x$. По теореме Птоломея, что $AE \cdot BC = AC \cdot BE + AB \cdot EC$, то есть $2m = n(1+x)$. Теперь

$$\frac{2}{1+x} = \frac{n}{m} = \frac{AC}{CF} = \frac{BE}{BF} = \frac{BC}{BF} = \frac{BF+FC}{BF} = 1 + \frac{FC}{BF} = 1 + \frac{EC}{BE} = 1 + x,$$

то есть $(1+x)^2 = 2$. Следовательно, $CD = x = \sqrt{2} - 1 < 1$.

Третье решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$ и $AB = AC$, тогда $\angle BDC = 180^o - \alpha$. Заметим, что площади треугольников BAC и BDC равны так как, два треугольника имеют равные высоты и общая основания, откуда следует, что $CD = a^2$. Применив теорему косинусов в треугольниках ABC и BDC получим систему $1 = 2CD(1 - \cos\alpha$ и $CD^2 + 2CD\cos\alpha = 0$. Решая эту систему, получим $CD = \sqrt{2} - 1 < 1$.

№ 4. В треугольнике ABC биссектрисы AL и BT пересекаются в точке I, а их продолжения пересекают описанную окружность соответственно в точках E и D. Отрезок DE пересекает стороны AC и BC соответственно в точках F и K. Доказать, что четырехугольник $KCFI$ является ромбом со стороной $\sqrt{DF \cdot EK}$.



Решение. По свойствам углов в окружности

$$\angle CFK = \angle CFE = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{AD}) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B),$$

(рис. 47) аналогично

$$\angle CKF = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B),$$

следовательно, $\triangle CKF$ равнобедренный, откуда $FC = KC$.

Докажем, что $IF \parallel KC$. Так как

$$\angle CAE = \angle LAB, \qquad \angle ABL = \angle AEC,$$

то

$$\triangle ABL \sim \triangle AEC$$

по двум углам, поэтому

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BL}{AC}, \qquad \frac{AE}{AC} = \frac{CE}{BL}.$$

Так как BD — биссектриса $\angle B$, а ED — биссектриса $\angle CEA$, то

$$\frac{CF}{CE} = \frac{BE}{BL}.$$

По обратной теореме Фалеса, имеем $IF \parallel KC$. Аналогично получаем $IK \parallel CF$. Таким образом, $IKCF$ — параллелограмм, а значит и ромб, поскольку имеет равные смежные стороны $FC = KC$.

б)

$$\triangle DFC \sim \triangle KEC$$

по двум углам, так как

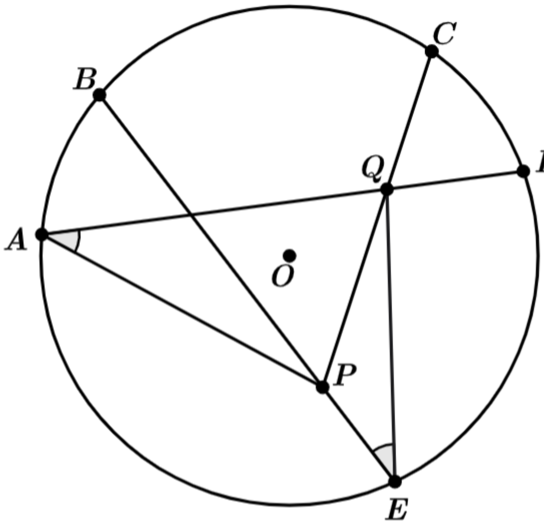
$$\angle FDC = \angle KCE = \frac{1}{2}\angle A, \qquad \angle FCD = \angle KEC = \frac{1}{2}\angle B.$$

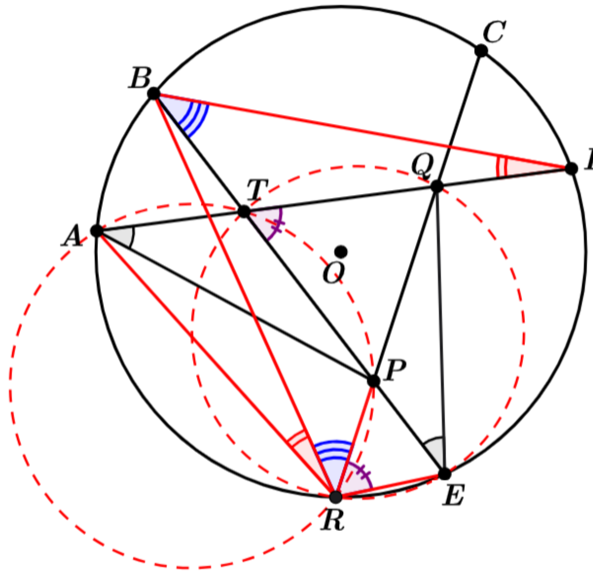
Следовательно,

$$\frac{DF}{KC} = \frac{FC}{KE} \quad \Longrightarrow \quad KC^2 = KC \cdot FC = DF \cdot KE,$$

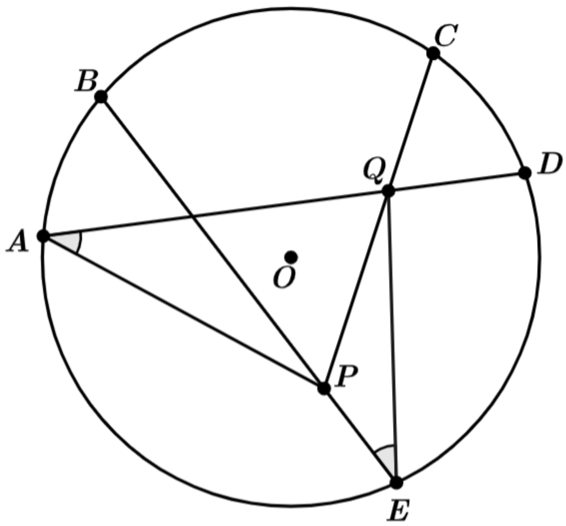
что и требовалось доказать.

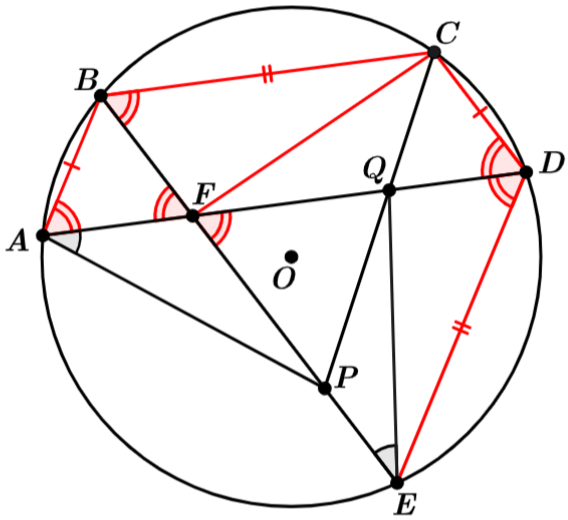
№ 5. На окружности с центром O последовательно взяты пять точек A, B, C, D и E так, что $\angle AOC = \angle BOD = \angle COE$. На хорде BE взята точка P. Отрезок CP пересекает хорду AD в точке Q. Докажите, что $\angle PAQ = \angle PEQ$.





Первое решение. Из условия следует, что $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE}$. Пусть CP пересекает окружность в точке R. Проводим хорды AR, BR и BD. Углы ARB и ADB опираются на одну дугу окружности и поэтому равны. Углы EBD и BRC опираются на равные дуги и поэтому равны. Тогда $\angle DTE = \angle DBE + \angle BDA = \angle BRC + \angle ARB = \angle ARP$, откуда следует, что четырехугольник $ATPR$ - вписанный. Сразу же заметим, что четырехугольник $TQER$ также является вписанным, так как $\angle QTE = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DE}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE}) = \angle QRE$. Следовательно, $\angle PAQ = \angle TRQ = \angle TEQ$.





Второе решение. Поскольку $\angle AOC = \angle BOD$ получаем $AC = BD$. Известно тогда, что $ABCD$ - равнобокая трапеция. Аналогично, $BCDE$ - равнобокая трапеция, причем если $BC \parallel AD$, то $CD \parallel BE$. Пусть $AD \cap BE = F$. Поскольку $BF \parallel CD$ и $BC \parallel FD$ то $BCDF$ - параллелограмм, откуда $AB = CD = BF$ и $ED = BC = DF$. Следовательно, получим цепочку равенств: $\angle BAF = \angle BFA = \angle DFE = \angle DEF \implies \angle FAP = \angle QEF \iff \implies \angle DQE = \angle QEF + \angle QFE = \angle QEF + \angle BAF = \angle FAP + \angle BAF = \angle BAP$. Так как $\angle ABE = \angle ADE$ то $\angle DQE = \angle BAP$. Тогда треугольники ABP и QDE подобны. Следовательно,

$$\frac{BA}{AP} = \frac{BF}{PB} = 1 - \frac{FP}{PB} = 1 - \frac{FQ}{BC} = 1 - \frac{FQ}{FD} = \frac{QD}{DF} = \frac{QD}{DE}$$

откуда $\angle PAQ = \angle PEQ$.