Решения заданий 1 тура. 8 класс

№1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки M, N, P и Q являются серединами сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Известно, что $MP = NQ$. Докажите, что диагонали AC и BD перпендикулярны.

Решение. В треугольнике ABC отрезок MN является средней линией. Поэтому $MN = AC/2$ и $MN \parallel AC$. Аналогично, в треугольнике ADC имеем $QP = AC/2$ и $QP \parallel AC$. Следовательно, $MN = QP$ и $MN \parallel QP$. Поэтому четырехугольник $MNPQ$ параллелограмм. Известно, что если в параллелограмме диагонали равны, то этот четырехугольник — прямоугольник. Значит, $MNPQ$ — прямоугольник, поэтому $\angle MNP = 90°$. А так как $MN \parallel AC$ и $NP \parallel BD$, то угол между MN и NP такой же, что и угол между AC и BD. Поэтому угол между AC и BD равен $90°$, то есть они перпендикуляры.

№2. Дана сетчатая таблица 9×7, в которой одна клетка закрашена (см. рис. 1). Сколько прямоугольников, стороны которого идут по линиям сетки, содержат эту закрашенную клетку?

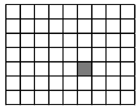

Рис. 1

Ответ. 360 прямоугольников.

Решение. Любой прямоугольник определяется угловыми (возможно совпадающими) клетками: верхним левым углом и нижним правым углом. Это значит, что выбрав эти угловые клетки, мы выбираем один прямоугольник.

Разделим наш прямоугольник на две прямоугольные области (см. рис. 2). В первой области содержится 30 клеток, во второй — 12. Если в качестве верхней левой угловой клетки выберем клетку из первой области, то, чтобы искомый прямоугольник содержал закрашенную клетку, нижний правый угол придется выбрать из второй области. Тогда всего число выбора будет равно $30 \cdot 12 = 360$.

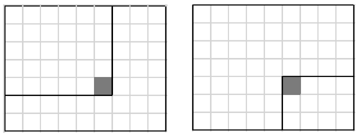

Рис. 2

№3. Пусть x, y, z — положительные числа. Докажите неравенство: $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geqslant 4xyz - 4$.

Решение. Верное неравенство $(x-2)^2 \geqslant 0$ эквивалентно неравенству $x^2 \geqslant 4x - 4$. Аналогично, $y^2 \geqslant 4y - 4$ и $z^2 \geqslant 4z - 4$. Тогда

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geqslant (4x-4) + x(4y-4) + xy(4z-4) = 4xyz - 4.$$

№4. Набор чисел a_1, a_2, …, a_n является перестановкой чисел 1, 2, …, n в каком-то порядке. Для какого натурального n возможно такое, что числа

$$0,\ a_1,\ a_1 + a_2,\ \ldots,\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

дают попарно различные остатки при делении на $n+1$?

Ответ. Для всех нечетных чисел n.

Решение. Если n — чётное число, то сумма

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

делится на $n+1$, так как $\frac{n}{2}$ целое число, то есть S даёт остаток 0 при делении на $n+1$. Но по условию задачи, S не должен давать остаток 0, так как этот остаток уже встречается в самом начале (перед a_1). Следовательно, n не может быть чётным числом.

Пусть n — нечётное число. Покажем пример перестановки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел 1, 2, …, n, которая удовлетворяет условию задачи.

Пусть $n = 2k+1$ для некоторого неотрицательного числа k. Рассмотрим последовательность

$$1,\ 2k,\ 3,\ 2k-2,\ 5,\ 2k-3,\ \ldots,\ 2,\ 2k+1, \qquad (*)$$

построенная следующим образом: для всех $1 \leqslant i \leqslant 2k+1$

$$\begin{cases} a_i = i, & \text{если } i \text{ нечётно}, \\ a_i = 2k+2-i, & \text{если } i \text{ чётно}. \end{cases}$$

Тогда последовательность $(*)$ содержит ровно $2k+1$ чисел, и каждое из чисел $1, 2, \ldots, 2k+1$ встречается ровно по одному разу. Действительно, для каждого нечётного числа m из множества $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$, выполнено $a_m = m$, а для каждого чётного числа m, выполнено $a_{2k+2-m} = 2k+2-(2k+2-m) = m$.

Теперь будем определим остатки $a_1 + a_2 + \ldots + a_m \pmod{2k+2}$.

Пусть $b_m = a_1 + a_2 \ldots + a_m$. Рассмотрим по отдельности случаи.

Случай 1: m нечётно. Тогда $a_1 \equiv 1 \pmod{2k+2}$, $a_2 + a_3 = a_4 + a_5 = \ldots = a_{2k} + a_{2k+1} = 2k+3 \equiv 1 \pmod{2k+2}$. Поэтому,

$$\{b_1, b_3, \ldots, b_{2k+1}\} \equiv \{1, 2, 3, \ldots, k+1\} \pmod{2k+2}.$$

Случай 2: m чётно. Тогда $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = \ldots = a_{2k-1} + a_{2k} = 2k+1 \equiv -1 \pmod{2k+2}$. Поэтому,

$$\{b_2, b_4, \ldots, b_{2k}\} = \{-1, -2, \ldots, -k\} \equiv \{2k+1, 2k, \ldots, k+2\} \pmod{2k+2}.$$

Следовательно, $b_1, b_2, \ldots, b_{2k+1}$ имеют разные остатки при делении на $2k+2$. Это и завершает доказательство.

Решения заданий 2 тура. 8 класс

№5. В выпуклом четырехугольнике $PQRS$ даны длины сторон: $PQ = 40$, $PS = 60$ и $RS = 20$. Найдите значение $\angle QRS$, если $\angle QPS = \angle RSP = 60^\circ$.

Ответ. $\angle QRS = 150^\circ$

Решение. Пусть продолжения сторон PQ и SR пересекается в точке A. Тогда $\triangle AQS$ равносторонний, поэтому $AQ = 20$ и $AR = 40$. Пусть B — середина отрезка AR. Тогда и $\triangle AQB$ также равносторонний, а $\triangle QBR$ равнобедренный, с углом 120° при вершине B. Следовательно, $\angle BRQ = 30^\circ$, $\angle QRS = 180^\circ - \angle BRQ = 150^\circ$.

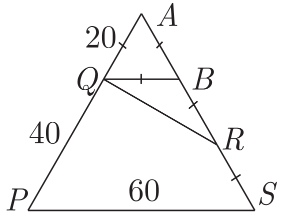

Рис. 3

№6. «Набором различных простых делителей» натурального числа назовём все его простые делители, перечисленные без повторений. Например, у числа 40 «набор различных простых делителей» — это 2 и 5. Даны два числа $A = 2^k - 2$ и $B = 2^k \cdot A$, где $k \geqslant 2$. Докажите, что числа $A + 1$ и $B + 1$ имеют один и тот же «набор различных простых делителей».

Решение. Заметим, что $B+1 = 2^k(2^k-2)+1 = (2^k-1)^2 = (A+1)^2$. Поэтому, если число $A+1$ делится на какой нибудь простой делитель p, то число $B + 1 = (A+1)^2$ также делится на это простое число p. Также работает в обратную сторону: если у числа $B+1$ есть какой нибудь простой делитель q, то $B+1 = (A+1)^2 \vdots q$, то есть $(A+1) \vdots q$. Это же означает, что числа $A+1$ и $B+1$ имеют один и тот же «набор» различных простых делителей.

№7. Найдите все тройки действительных чисел (x, y, z), удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{cases} xy = z - x - y, \\ xz = y - x - z, \\ yz = x - y - z. \end{cases}$$

Ответ. $(-2, 0, -2)$, $(-2, -2, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, -2, -2)$ и $(-1, -1, -1)$.

Первое решение. Вычтем из первого уравнения второе, получим уравнение $xy - xz = 2z - 2y$, которое эквивалентно уравнению

$$(x+2)(y-z) = 0. \qquad (1)$$

Из (1) следует либо $x = -2$ либо $z = y$.

Если $x = -2$, то из первого уравнения получим $-2y = z + 2 - y$, или то же самое $y + z = -2$. Подставив $x = -2$, $y + z = -2$ в третье уравнение, получим $yz = -2 - (-2) = 0$. Следовательно, или y или z равен 0, поэтому при $x = -2$, получим решения $(-2, 0, -2)$ и $(-2, -2, 0)$.

Если $z = y$, то первое уравнение даст равенство $xy = -x$, или то же самое $x(y+1) = 0$. Если $x = 0$ и $z = y$, то из третьего уравнения получим $y^2 = -2y$, откуда $y = 0$ или $y = -2$. Если $y = -1$ и $z = y = -1$, то из третьего уравнения получим $x = -1$. Следовательно, при $y = z$, получим три решения $(0, 0, 0), (0, -2, -2)$ и $(-1, -1, -1)$

В результате рассмотрения этих случаев, получим всего 5 решений:

$$(-2, 0, -2),\ (-2, -2, 0),\ (0, 0, 0),\ (0, -2, -2),\ (-1, -1, -1).$$

Второе решение. Прибавив в каждую часть первого уравнения по x, получим

$$x(y+1) = z - y = (z+1) - (y+1) \Rightarrow (x+1)(y+1) = z+1.$$

Те же действия проделаем со вторым и третьим уравнениями. После, сделав замену $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$, получим новую систему

$$\begin{cases} ab = c, \\ ac = b, \\ bc = a. \end{cases}$$

Если хотя бы одно из чисел a, b, c равно 0, то и остальные равны 0, то есть $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Пусть ни одно из a, b, c не равно 0. Подставив $c = ab$ во второе и третье уравнения, получим $a^2b = b$ и $b^2a = a$ соответственно. Следовательно, $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ (так как a, b ненулевые числа). Комбинация этих случаев даёт еще 4 решения: $(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$ и $(-1, -1, 1)$. В переменных x, y, z это и есть ответы из первого решения.

№8. Дано множество $M = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Пусть S — подмножество M такое, что суммы во всех парах чисел из S различны. Например, в подмножестве $\{1, 2, 3, 5\}$ нет пары чисел с одинаковой суммой и такое подходит, а в подмножестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ найдутся две пары с одинаковой суммой $(1 + 4 = 2 + 3)$ и такое не подходит. Какое наибольшее количество элементов может быть в S? Напоминаем, что в любом множестве не должно быть одинаковых чисел.

Ответ. 5. Пример какого множества: $S = \{1, 2, 3, 5, 8\}$.

Первое решение. Предположим, что подмножество S, множества M, содержит 6 элементов таких, что все попарные суммы различны. Наименьшее значение суммы двух элементов S равно $1 + 2 = 3$, а наибольшее равно $8 + 9 = 17$. Поэтому попарные суммы принимают 15 значений: от 3 до 17. В то же время, из S можно образовать $C_6^2 = 15$ попарных сумм. Следовательно, в этих суммах числа $3, \ldots, 17$ встречается ровно по одному разу. Но сумму 3 дают только числа из $\{1, 2\}$, а сумму 17 только числа $\{8, 9\}$. Поэтому числа $1, 2, 8, 9$ должны быть в S. Но $1+9 = 2+8$, что уже не удовлетворяет условию. Следовательно, S может содержать не более 5 элементов.

Второе решение. Также, как и в первом решений, предположим, что S содержит 6 элементов $a_1 < a_2 < \ldots < a_6$.

Поскольку $a_1 + a_6 \neq a_2 + a_5$, то $a_6 - a_5 \neq a_2 - a_1$. Аналогично, $a_6 - a_5 \neq$ $\neq a_4 - a_3$ и $a_4 - a_3 \neq a_2 - a_1$. Эти три разности должны быть различными положительными целыми числами, поэтому

$$(a_6 - a_5) + (a_4 - a_3) + (a_2 - a_1) \geqslant 1 + 2 + 3 = 6.$$

Аналогично, $a_3 - a_2 \neq a_5 - a_4$, поэтому

$$(a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) \geqslant 1 + 2 = 3.$$

Сложив две вышеуказанные неравенства, получим

$$a_6 - a_5 + a_5 - a_4 + a_4 - a_3 + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 \geqslant 6 + 3 = 9$$

то есть $a_6 - a_1 \geqslant 9$. Здесь уже есть противоречие, так как любой элемент S лежит между 1 и 9, поэтому разность любых двух элементов не больше 8.