Решения заданий 1 тура. 7 класс

№1. Числа от 1 до 2022 выписали в строчку, и перед каждым поставили звездочку. Получилось $*1*2*3*\ldots*2022$. Два ученика играют в игру. Игру начинает первый игрок, далее ходят по очереди. Каждый на своем ходу меняет звездочку на знак плюс или минус. После того, как звездочек не останется на доске, подсчитывается результат. Если он чётен, то выигрывает первый игрок, а если нечётен — то второй. Кто выиграет при правильной игре — первый или второй?

Ответ. Выиграет второй игрок.

Решение. Количество выписанных нечётных чисел равно 1011, то есть нечётно. Так как нечётное количество нечетных чисел в сумме дают нечетное число, то чётность результата не зависит от расстановки плюсов и минусов, а зависит только от количества нечётных чисел в первоначальном наборе. В нашем случае любая сумма будет нечётна. Значит, независимо от ходов игроков, выигрывает второй игрок.

№2. Из цифр «0», «1», «2», «3» составили все четырехзначные числа и выписали их в ряд в порядке возрастания (одна цифра может встречаться несколько раз в одном числе). Какое число в ряду будет стоять на 99-ом месте?

Ответ. 2202.

Решение. Так как «0» не может стоять в начале, то всего таких чисел $3\cdot4\cdot4\cdot4=192$. Первые 64 это числа, у которых цифра «1» первая. Следовательно, у следующих 64 чисел цифра «2» будет вначале.

Чисел вида $20**$ ровно 16 $(1\cdot1\cdot4\cdot4=16)$.

Чисел вида $21**$ ровно 16 $(1\cdot1\cdot4\cdot4=16)$.

Это уже первые 96 чисел $(64+16+16=96)$.

Значит, число 2200 — 97-ое, число 2201 — 98-ое, число 2202 — 99-ое.

№3. Действительные числа x, y и z таковы, что $x+y=\frac{xy}{2}$, $y+z=\frac{yz}{3}$ и $z+x=\frac{zx}{4}$. Найдите значение z, если $xyz>0$.

Ответ. $z=24$.

Решение. Очевидно, что ни одно из чисел не равно 0. Действительно, если $x=0$, то из первого уравнения следует $y=0$, а из третьего уравнения — $z=0$. Но $xyz>0$. Аналогично рассматриваются другие случаи. Составим систему из трех данных уравнений и преобразуем её:

$$\begin{cases} x+y=\frac{xy}{2}, \\ y+z=\frac{yz}{3}, \\ z+x=\frac{zx}{4}, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Просуммировав последние три уравнения, учитывая, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{z}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{z}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{24}\ \Rightarrow\ z=24.$$

№4. В остроугольном треугольник ABC, $AB=AC$. Точка D — основание высоты опущенного из вершины B на CA, а точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на BC. Известно, что $BC=AB+AD$. Докажите, что $BE=CD$.

Решение. Пусть ED пересекает продолжение стороны BA в точке F. Тогда $\angle AFD=90^\circ-\angle ABC=90^\circ-ACB=\angle CDE=\angle ADF$. Следовательно, $AF=AD$, откуда $BC=AB+AD=BF$. Так как $\angle BDC=90^\circ=\angle BEF$ и $\angle BCD=\angle FBE$, то треугольники BCD и FBE равны. Поэтому $CD=BE$.

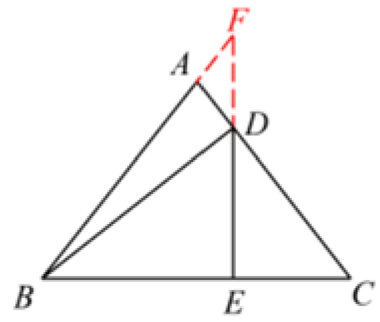

Рис. 1

Решения заданий 2 тура. 7 класс

№5. Прямоугольник разбили двумя прямыми, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника. Один из них оказался квадратом, а периметры прямоугольников, соседних с ним по стороне, равны 20 см и 22 см. Найдите площадь исходного прямоугольника.

Ответ. 110 см^2.

Решение. Введем обозначения так, как показано на рис. 2. Выразим половины периметров прямоугольников, указанных в условии: $a + x = 10$ и $b + x = 11$. Тогда площадь исходного прямоугольника равна $(a + x)(b + x) = 110$ (см^2).

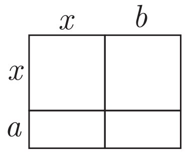

Рис. 2

№6. В выпуклом четырехугольнике $PQRS$ даны длины сторон: $PQ = 40$, $PS = 60$ и $RS = 20$. Найдите значение $\angle QRS$, если $\angle QPS = \angle RSP = 60°$.

Ответ. $\angle QRS = 150°$

Решение. Пусть продолжения сторон PQ и SR пересекается в точке A. Тогда $\triangle AQS$ равносторонний, поэтому $AQ = 20$ и $AR = 40$. Пусть B — середина отрезка AR. Тогда и $\triangle AQB$ также равносторонний, а $\triangle QBR$ равнобедренный, с углом $120°$ при вершине B. Следовательно, $\angle BRQ = 30°$, $\angle QRS = 180° - \angle BRQ = 150°$.

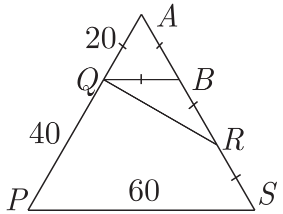

Рис. 3

№7. Четырехзначное число называется *хорошим*, если в его записи найдутся три различные цифры из множества $\{0, 1, 2, 3\}$, а четвертая цифра, если она отлична от трех предыдущих, не из этого множества. Например, числа 1024, 2100 — хорошие, а числа 1023, 2128 не являются хорошими. Найдите общее количество хороших чисел.

Ответ. 576.

Решение. Сначала найдем всевозможное количество способов составления четырехзначных чисел, удовлетворяющих этому условию задачи, а затем вычтем количество тех случаев, когда 0 находится в разряде тысяч.

Если все четыре цифры разные, то выбираем три цифры из набора 0, 1, 2, 3 и выбираем одну цифру из 4, 5, 6, 7, 8 и 9, следовательно, всего $4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 576$ способов. Теперь вычтем случаи, когда 0 находится в разряде тысяч: если это так, то две цифры должны быть выбраны из 1, 2 или 3, а третья цифра должна быть из 4, 5, 6, 7, 8 и 9, поэтому всего $3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 108$ чисел, когда цифра тысяч равна 0.

Далее рассмотрим случай, когда имеет место многократное использование цифр. Выберем три цифры из 0, 1, 2 или 3, где одна будет использоваться дважды, а две другие — один раз. У нас есть 4 способа выбрать повторяющуюся цифру и 3 способа выбрать две другие цифры, которые будут появляться один раз. Есть 12 способов расставить выбранные числа в 4-значные числа. Таким образом, в данном случае имеется $12 \cdot 12 = 144$ различных способа. Затем, мы снова вычтем количество, в котором 0 будет стоять в разряде тысяч, что составляет четверть случаев, следовательно, 36 способов.

Таким образом, общее число равно $576 - 108 + 144 - 36 = 576$ способов.

№8. Найдите наибольшее натуральное число n такое, что $n^3 + 10$ делится на число $n + 10$.

Ответ. 980.

Решение. Заметим, что $n^3 + 10 = n^3 + 1000 - 990 = (n + 10)(n^2 - 10n + 100) - 990$. Поэтому, если $n^3 + 10$ делится на $n + 10$, то и число 990 также делится на $n + 10$. Следовательно, наибольшее значение n равно 980.