Решения заданий 1 тура. 6 класс

№1. Квадрат разрезан на шесть прямоугольников так, как показано на рисунке справа. Оказалось, что площади всех прямоугольников равны. Найдите отношение сторон прямоугольника, отмеченного буквой F.

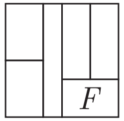


Рис. 1

Ответ. $3:2$.

Решение. Площадь каждого прямоугольника в 6 раз меньше площади квадрата. Площадь прямоугольника Q, составленного из прямоугольников D, E и F (рис. 2), равна половине площади квадрата; значит, горизонтальная сторона прямоугольника F равна половине стороны квадрата. Площадь прямоугольника F составляет треть от площади прямоугольника Q; значит, вертикальная сторона прямоугольника F равна трети стороны квадрата. Поэтому его стороны относятся как $3:2$.

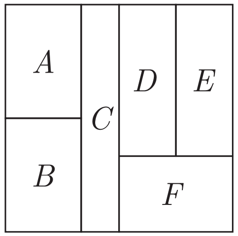


Рис. 2

№2. Найдите семь решений ребуса:

$$FIZ \cdot MAT = 50 \cdot LET.$$

(Разным цифрам соответствуют разные буквы и наоборот.)

Решение. У ребуса всего 7 решений:

$$126 \cdot 375 = 50 \cdot 945,$$

$$134 \cdot 250 = 50 \cdot 670,$$

$$138 \cdot 250 = 50 \cdot 690,$$

$$146 \cdot 250 = 50 \cdot 730,$$

$$175 \cdot 268 = 50 \cdot 938,$$

$$186 \cdot 250 = 50 \cdot 930,$$

$$378 \cdot 125 = 50 \cdot 945.$$

№3. Числа от 1 до 2022 разбили на две группы по 1011 чисел. Затем числа в группах перемножили. Могло ли оказаться так, что разность этих двух произведении равняется 2121?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим обратное. Пусть мы смогли разбить данные числа на две группы так, как требует задача. Тогда, разность произведений может равняться нечетному числу 2121, только если одно произведение нечётное, а другое чётное. Но произведение натуральных чисел нечётно, только если все сомножители нечётны. А среди чисел от 1 до 2022 ровно 1011 нечётных. Значит, числа от 1 до 2022 должны быть разбиты на группы нечётных чисел $(1, 3, \ldots, 2021)$ и чётных чисел $(2, 4, \ldots, 2022)$. Так как и в первой группе, и во второй есть числа делящиеся на 9, то оба произведения делятся на 9, поэтому и разность делится на 9. Но число 2121 на 9 не делится. Противоречие.

№4. На уроке физкультуры выстроились в ряд 15 мальчиков и 15 девочек. Каждый из 30 детей держал в руках у мячику. Учитель велел каждому мальчику передать свой мяч соседу справа, а каждый девочке — соседу слева. При этом половина детей выполнила команду правильно, а остальные перепутали и отдали мяч соседу с другой стороны. Докажите что кто-то остался без мяча.

Решение. Допустим, что мячики остались у всех школьников. Это означает, что у каждого из них оказалось ровно по одному мячу. Тогда самый левый школьник получил мяч от соседа справа, а ему отдал свой мяч, поскольку других соседей у него нет. Таким образом, пара самых левых школьников просто обменялась мячами. Тогда третий слева школьник отдал свой мяч соседу справа (иначе у соседа слева образуется два мяча) и в ответ получил от него мяч (иначе он сам окажется без мяча). То есть эта пара школьников также обменялась мячами. Поэтому все разбиваются на пары школьников, обменявшихся мячами. Значит, 15 школьников отдали свои мячи левым соседям, а оставшиеся 15 — правым. Пусть k девочек выполнили команду правильно (передали мяч налево), а $15-k$ девочек — неправильно (передали мяч направо). Так как правильно выполнили команду всего 15 детей, то мальчиков среди них $15-k$ они передали мячики своим соседям справа. Следовательно, $15-k+15-k = 30-2k$ школьников отдали мячи направо. Но это число заведомо четное, а таких школьников должно быть 15. Противоречие.

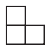
Решения заданий 2 тура. 6 класс

№5. На экране высвечено число 48. При нажатии кнопки все цифры числа перемножаются, к результату прибавляется 27, полученное число высвечивается на экране (предыдущее число стирается). Кнопку нажали 2022 раза. Какое число теперь на экране?

Ответ. 27.

Решение. Проследим изменения чисел после первых нажатий на кнопку:
$48 \to$ после 1-го нажатия получим $4 \cdot 8 + 27 = 32 + 27 = 59$
$59 \to$ после 2-го нажатия получим $5 \cdot 9 + 27 = 45 + 27 = 72$
$72 \to$ после 3-го нажатия получим $7 \cdot 2 + 27 = 14 + 27 = 41$
$41 \to$ после 4-го нажатия получим $4 \cdot 1 + 27 = 4 + 27 = 31$
$31 \to$ после 5-го нажатия получим $3 \cdot 1 + 27 = 3 + 27 = 30$
$30 \to$ после 6-го нажатия получим $3 \cdot 0 + 27 = 0 + 27 = 27$
$27 \to$ после 7-го нажатия получим $2 \cdot 7 + 27 = 14 + 27 = 41$
$41 \to$
... Видим, что число 41 появилось во второй раз, значит, дальше числа будут повторяться периодически. На экране, таким образом, последовательно будут появляются числа: 48 59 72 (41 31 30 27) (41 31 30 27) и т. д.

Заметим, что, начиная с третьего нажатия на кнопку, мы получим на экране период из четырех чисел: 41, 31, 30, 27. Он выделен скобками. Перед периодом стоят три числа. Если их отбросить, то в оставшейся периодической последовательности с периодом 4 нас интересует 2020-е число. Т.к. 2020 делится на 4, то это последнее число периода, т. е. 27.

№6. Разрежьте клетчатый квадрат 6×6 на «трёхклетчатые» уголки  и прямоугольники 1×3  так, чтобы каждая фигура граничила (имела общий отрезок) с фигурками обоих типов. (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)

Решение. Один из примеров показан на рисунке 3.

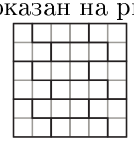


Рис. 3

№7. а) Можно ли выписать на доске четыре различных двузначных чисел так, чтобы разность любых двух из них было простым числом?

б) Можно ли выписать на доске пять различных двузначных чисел так, чтобы разность любых двух из них было простым числом?

Ответ. а) Да, можно. Например 10, 12, 15, 17. б) Нет, нельзя.

Решение. б) Пусть существует пять таких чисел. Тогда среди них найдутся по крайней мере три числа одной четности. Их разности — четные числа. Но среди четных чисел только 2 — простое число. Значит, любые два из этих трёх чисел различаются на 2. А это невозможно, так как наименьшее из этих чисел должно быть на 2 меньше, чем каждый из оставшихся.

№8. В классе было 20 учеников. После уроков, за плодотворную работу учеников, учитель начал вручать каждому ученику ровно по одной конфетке. Но конфеток хватило не всем. Тогда учитель решил сбегать в магазин за конфетками, и покинул временно кабинет. Время от времени один из учеников давал свою конфетку другому ученику, у которого не было конфетки. В конце 10 учеников подсчитали, что каждый из них отдавал конфетку больше, чем получал. Скольким ученикам учитель успел раздать конфетки перед тем, как уйти в магазин?

Ответ. 10 ученикам.

Решение. Проследим за количеством конфет у одного ученика.

В каждый момент оно равно 0 или 1. Когда ученик отдает конфету, это число уменьшается на 1, а когда получает — увеличивается на 1. Если он отдавал конфету больше раз, чем получал, то это число за время встречи уменьшилось. Такое может быть только если вначале оно равно 1, а в конце 0. Следовательно, у 10 учеников, упомянутых в условии, вначале есть конфеты, а в конце — нет.

Теперь подсчитаем количество конфет. В начале есть по крайней мере 10 учеников с конфетами, следовательно, всего конфет не меньше 10. В конце есть по крайней мере 10 учеников без конфетки, значит, есть не более 10 учеников с конфеткой. Следовательно, конфет не больше 10. Поэтому конфет ровно 10. Значит, и количество учеников с конфеткой в любой момент (в частности, вначале) равно 10.