Математическая байга, 4 класс

1. На карточке у каждого из 15 школьников написано какое-то натуральное число. Известно, что все эти числа различны, а их сумма равна 143. Чему может быть равно среднее по величине из написанных чисел?

Ответ: 8, 9 или 10.

Решение. Запишем все числа в порядке возрастания. Заметим, что среднее число (то есть восьмое по порядку) будет не меньше восьми.

1) Существует пример, когда среднее число равно в точности 8:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+38=143.$$

2) Приведём пример, когда среднее число равно 9.

$$1+2+3+4+5+6+7+9+10+11+12+13+14+15+31=143.$$

3) Существует также пример, когда среднее числа равно =10.

$$1+2+3+4+5+6+7+10+11+12+13+14+15+16+24=143.$$

4) Пусть среднее число больше или равно 11. Все числа различны между собой, поэтому сумма всех чисел будет не меньше

$$1+2+3+4+5+6+7+11+12+13+14+15+16+17+18=144,$$

что невозможно по условию.

2. На переправу пришли несколько мальчиков, вес каждого из которых был равен 40 кг, 50 кг или 60 кг, причем мальчиков каждого веса в этой компании было как минимум двое. Они собирались переправиться на другой берег, причем у них была с собой лодка. Какой минимальной грузоподъемности должна быть лодка, чтобы все мальчики сумели переправиться на другой берег?

Ответ: 80 кг.

Решение.

1) Грузоподъёмность лодки должна быть не меньше 80 кг, иначе на тот берег никогда не смогут переправиться двое, и некому будет перегонять лодку назад, чтобы забрать остальных.

2) С помощью лодки грузоподъёмностью 80 кг можно переправить всех следующим образом: двое мальчиков весом по 40 кг каждый переплывают на другой берег, потом один из них плывёт назад; потом переправляется любой из оставшихся, второй 40-килограммовый мальчик отгоняет лодку назад; потом снова двое 40-килограммовых мальчиков переправляются на другой берег и, один из них возвращает лодку обратно, и т.д. до тех пор, пока не переправятся все, кроме двух 40-килограммовых. Последним рейсом они переправляются – и вся копания на другом берегу!

3. Чтобы проникнуть на секретный объект, нужно ввести пароль из 13 натуральных чисел, сумма которых равна 2123. Разведчик узнал следующую информацию, что правильный пароль получен из 15 последовательных натуральных чисел путём вычеркивания каких-то двух из них. Успеет ли разведчик проникнуть на секретный объект, если на ввод одного пароля он тратит не более трёх секунд, а система безопасности блокирует дверь, если правильный пароль не будет набран по истечении 50 секунд после первой неудачной попытки ввода пароля?

Ответ: успеет (разведчику надо перебрать 17 вариантов, после ввода неудачного пароля ему потребуется не более $16 \cdot 3 = 48$ секунд, чтобы ввести верный пароль)

Решение. Пусть выбрали 15 последовательных натуральных чисел, и самое маленькое из них равно x, тогда эти числа равны

$$x, x+1, x+2, \ldots, x+14.$$

Мы запишем их на доску и вычеркнем любые два числа для получения пароля. Сумма всех чисел, записанных на доске, равна

$$x + (x+1) + (\ x+2) + \ \ldots + (x+14) =$$
$$= 15x + (1 + 2 + \cdots + 14) = 15x + 15 \cdot 7 = 15x + 105.$$

Пусть были вычеркнуты числа $x + a$, $x + b$, где a, b – целые числа от 0 до 14, причём $a < b$. Тогда получаем

$$15x + 105 = 2123 + (x+a) + (x+b) \ \Leftrightarrow 13x = 2018 + (a+b).$$

Чтобы последнее уравнение имело решение, нужно, чтобы правая часть делилась на 13. Заметим, что $1 \leq a + b \leq 27$, поэтому $2019 \leq 2018 + (a+b) \leq 2045$. Среди натуральных чисел от 2019 до 2045 только 2028 и 2041 делятся на 13.

1) Пусть $2018 + (a+b) = 2028$, тогда

$$13x = 2028 \quad \Leftrightarrow \quad x = 156 \quad \text{и} \quad a + b = 10.$$

Значит, искомые числа равны

$$156, 157, 158, \ldots, 170.$$

В этом случае два числа вычеркнуть можно 5 способами:

А) 156 и 166 при $a = 0$, $b = 10$;
Б) 157 и 165 при $a = 1$, $b = 9$;
В) 158 и 164 при $a = 2$, $b = 8$;
Г) 159 и 163 при $a = 3$, $b = 7$;
Д) 160 и 162 при $a = 4$, $b = 6$.

2) Пусть $2018 + (a+b) = 2041$ тогда

$$13x = 2041 \quad \Leftrightarrow \quad x = 157 \quad \text{и} \quad a + b = 23.$$

Значит, искомые числа равны

$$157, 157, 158, \ldots, 171.$$

В этом случае два числа вычеркнуть можно 12 способами:

А) 156 и 179 при $a = 0$, $b = 23$;
Б) 157 и 178 при $a = 1$, $b = 22$;
В) 158 и 177 при $a = 2$, $b = 21$;
Г) 159 и 176 при $a = 3$, $b = 20$;
Д) 160 и 175 при $a = 4$, $b = 19$;
Е) 161 и 174 при $a = 5, b = 18$;
Ж) 162 и 173 при $a = 6, b = 17$;
З) 163 и 172 при $a = 7, b = 16$;
И) 164 и 171 при $a = 8, b = 15$;
К) 165 и 170 при $a = 9, b = 14$;
Л) 166 и 169 при $a = 10, b = 13$;
М) 167 и 168 при $a = 11, b = 12$.

Итак, набор из 15 последовательных натуральных чисел можно выбрать 2 способами. Для одного из этих способов существует 5 вариантов, а для другого – 12 вариантов вычеркивания двух чисел, чтобы сумма оставшихся чисел равнялась 2018.

Итого получается 17 различных вариантов паролей.

Если первый пароль окажется неверным, то ему достаточно перебрать максимум 16 вариантов, пока не введёт правильный пароль. На это ему потребуется не более $16 \cdot 3 = 48$ секунд.

4. Города A, B и C соединены дорогами. Между каждыми двумя городами есть не менее трех, но не более десяти прямых (то есть не проходящих через третий город) дорог. Географическое общество подсчитало, что добраться из A в C (напрямик или через B) можно 33 способами. А путей из B в A (прямых или через C) всего 23. Сколькими способами можно проехать из C в B (возможно, посетив по дороге A)?
Ответ: 21.
Решение. Пусть города A и B соединяет x дорог, B и C – y дорог, A и C – z дорог ($3 \leq x, y, z \leq 10$).
Тогда из A в C можно добраться $z + xy$ способами, а из B в A – $x + yz$ способами.
По условию задачи получаем уравнения

$$z + xy = 33, \quad x + \; yz = 23.$$

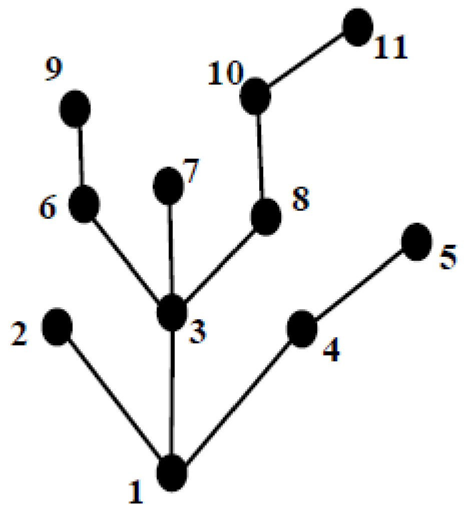
1) Пусть $x = 3$, тогда $yz = 20$. Отсюда $y = 4$, $z = 5$ или $y = 5, z = 4$. Отсюда $z + xy = 5 + 3 \cdot 4 = 17$ или $z + xy = 4 + 3 \cdot 5 = 19$, что противоречит условию задачи.
2) Пусть $x = 4$, тогда $yz = 19$, что невозможно, так как $3 \leq y, z \leq 10$.
3) Пусть $x = 5$, тогда $yz = 18$. Поэтому $y = 3$, $z = 6$ или $y = 6$, $z = 3$. Откуда $z + xy = 6 + 5 \cdot 3 = 21$ или $z + xy = 3 + 5 \cdot 6 = 33$.
4) Значит, $x = 5$, $y = 6$ и $z = 3$.
5) Пусть $x = 6$, тогда $yz = 17$. Это невозможно.
6) Пусть $x = 7$, тогда $yz = 16$. Отсюда $y = 4$, $z = 4$. Следовательно, $z + xy = 4 + 7 \cdot 4 = 32 \neq 33$.
7) Пусть $x = 8$, тогда $yz = 15$. Значит, $y = 3$, $z = 5$ или $y = 5$, $z = 3$. Получим $z + xy = 5 + 8 \cdot 3 = 29 \neq 33$ или $z + xy = 3 + 8 \cdot 5 = 43 \neq 33$.
8) Пусть $x = 9$, тогда $xy = 14$, но 14 невозможно разложить на множители, каждый из которых не меньше 3, но не больше 10.
9) Пусть $x = 10$, тогда $xy = 13$, что невозможно.

Итак, $x = 5$, $y = 6$ и $z = 3$. Но в таком случае из C в B можно добраться $y + zx = 6 + 5 \cdot 3 = 21$.

Возможен вариант решения с перебором всех случаев без составления уравнений.

5. На планете Урап в качестве фамилий используется имя отца. Космический исследователь Робин Бобин записал в алфавитном порядке фамилии и имена (в указанном порядке) 11 мужчин-урапчан, которые были кровными родственниками:

Ак Ос, Ак Па, Ак Ран, Ак Тун,
Ос Тун, Па Ак, Па Тун, Ран Тун,
Тун Ак, Тун Ос, Тун Па.



Кроме того, он нарисовал их генеалогическое древо, но забыл, кто кому приходится отцом, дедом и так далее. Помогите ему восстановить информацию, если первого зовут Па Тун (найдите все варианты и докажите, что других нет). (Номера на рисунке не соответствуют списку)
Ответ:

№	1 вариант	2 вариант
1	Па Тун	Па Тун
2	Тун Па	Тун Па
3	Тун Ак	Тун Ак

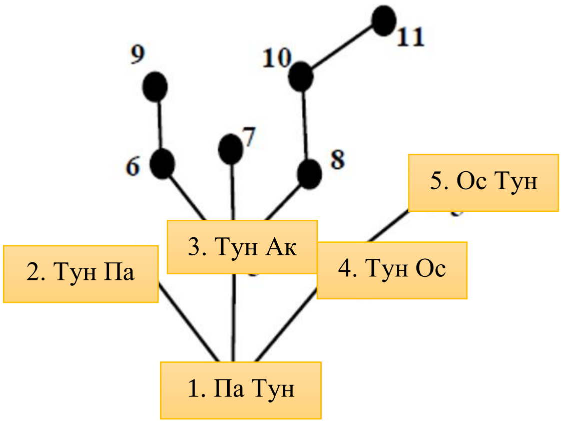
4	Тун Ос	Тун Ос
5	Ос Тун	Ос Тун
6	Ак Ран	Ак Ран
7	Ак Ос	Ак Тун
8	Ак Па	Ак Па
9	Ран Тун	Ран Тун
10	Па Ак	Па Ак
11	Ак Тун	Ак Ос

Решение.

1) 1-го урапчанина зовут Па Тун, тогда его сыновья 2, 3 и 4 – это Тун Ак, Тун Па и Тун Ос (пока неизвестно в каком порядке). У 3-го имеется три сына, этому условию удовлетворяет только Тун Ак. Значит, 3 – Тун Ак.

2) Пусть 2-го зовут Тун Па, а 4-го – Тун Ос, тогда 5 – Ос Тун.

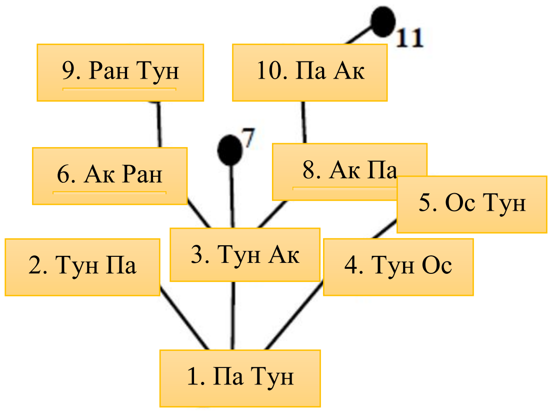
У Тун Ака сыновьями могут быть Ак Ос, Ак Па, Ак Ран, Ак Тун. Они стоят под номерами 6, 7 и 8. Под номером 6 и 8 не могут быть Ак Ос и Ак Тун, так как у них нет потомков. Значит 6 и 8 – Ак Па и Ак Ран (пока неизвестно в каком порядке).



А) Если 6 – Ак Па, 8 – Ак Ран, тогда 10 – Ран Тун, но тогда нет кандидата на номер 11, так как у Ран Туна нет потомков.

Б) Если 6 – Ак Ран и 8 – Ак Па, тогда 9 – Ран Тун, 10 – Па Ак, так как у Па Туна нет потомков.

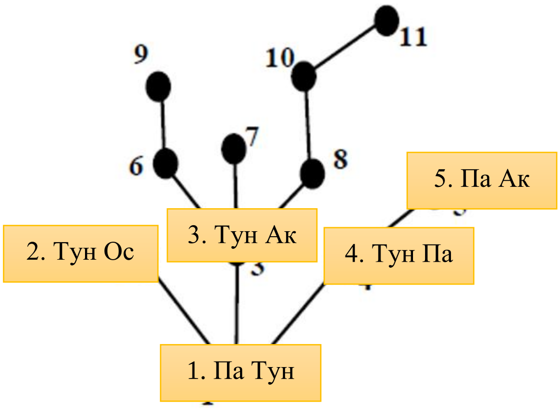
Ран (пока неизвестно в каком порядке).



В этом случае возможны 2 варианта: или 7 – Ак Ос, 11 – Ак Тун, или 7 – Ак Тун, 11 – Ак Ос.

3) Пусть 2-го зовут Тун Ос, а 4-го – Тун Па, тогда 5 – Па Ак.

У Тун Ака сыновьями могут быть Ак Ос, Ак Па, Ак Ран, Ак Тун. Они стоят под номерами 6, 7 и 8. Под номером 6 и 8 не могут быть Ак Па и Ак Тун, так как у них нет потомков. Значит 6 и 8 – Ак Ос и Ак Ран (пока неизвестно в каком порядке).

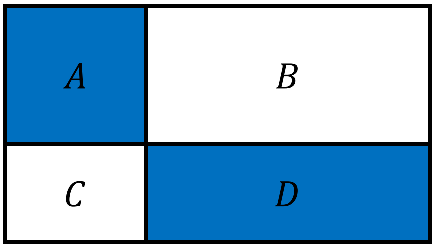


А) Если 6 – Ак Ос, 8 – Ак Ран, тогда 10 – Ран Тун, но тогда нет кандидата на номер 11, так как у Ран Туна нет потомков.
Б) Если 6 – Ак Ран и 8 – Ак Ос, тогда 10 – Ос Тун, но тогда нет кандидата на номер 11, так как у Ос Туна нет потомков.
Итак, случай 3 невозможен.

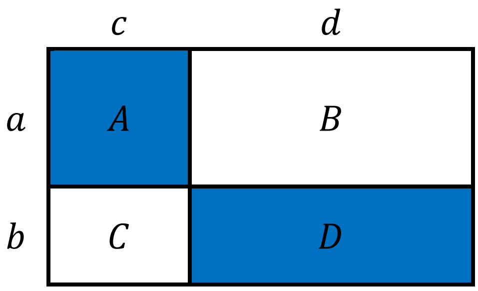
6. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь большого прямоугольника.

30		
21	35	
	10	8

Ответ: 228.
Решение.
1) Рассмотрим конструкцию



Докажем, что произведение площадей синих частей равно произведению площадей белых частей.
Обозначим стороны прямоугольников, как показано на рисунке ниже.



Тогда площадь прямоугольника A равна ac, прямоугольника B – ad, прямоугольника C – bc, прямоугольника D – bd. Тогда произведение площадей синих частей равно $ac \cdot bd = abcd$, а произведение площадей белых частей равно $ad \cdot bc = abcd$.
Как видно, эти произведения равны.

2) Вернёмся к нашему прямоугольнику. Обозначим неизвестные площади пярмоугольников через S_1, S_2, S_3 и S_4 (см. рисунок ниже).

30	S_1	S_2
21	35	S_3
S_4	10	8

Учитывая результат, полученный в п. 1, найдём S_1, S_2, S_3 и S_4:

$$21 \cdot S_1 = 30 \cdot 35 \Leftrightarrow S_1 = 30 \cdot 35 : 21 = 50;$$

$$35 \cdot S_4 = 21 \cdot 10 \Leftrightarrow S_4 = 21 \cdot 10 : 35 = 6;$$

$$10 \cdot S_3 = 8 \cdot 35 \Leftrightarrow S_3 = 8 \cdot 35 : 10 = 28;$$

$$35 \cdot S_2 = S_1 \cdot S_3 = 50 \cdot 28 \Leftrightarrow S_2 = 50 \cdot 28 : 35 = 40.$$

3) Тогда площадь большого прямоугольника равна сумме всех остальных:

$$S = 30 + 50 + 40 + 21 + 35 + 28 + 6 + 10 + 8 = 228.$$