

Математикалық бәйге, 4 – сынып

1. 15 оқушының әрқайсысының парағында қандай да бір натурал сан жазылған. Барлық сандардың әртүрлі екендігі және олардың қосындысы 143-ке тең екендігі белгілі. Осы жазылған сандардың ішіндегі шамасы жағынан ортаншы сан қай сан болуы мүмкін?

Жауабы: 8, 9 немесе 10.

Шешуі:

Барлық сандарды өсу ретімен орналастырамыз. Ортасындағы (реттік саны сегізінші) тұрған сан сегізден кем емес екендігін байқаймыз.

1) Ортасындағы сан 8-ге тең болғандағы мысал:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 38 = 143.$$

2) Ортасындағы сан 9-ға тең болғандағы мысал:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 31 = 143.$$

3) Ортасындағы сан 10-ға тең болғандағы мысал:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 24 = 143.$$

4) Ортасындағы сан 11-ге тең немесе одан артық болсын деп алайық.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 144,$$

Барлық сандардың әртүрлі екендігін ескерсек, шыққан қосынды 144-тен кем емес болып, есептің шартын қанағаттандырмайды.

Сонымен, жазылған сандардың ішіндегі шамасы жағынан ортаншы сан: 8, 9, 10 болуы мүмкін.

2. Әрқайсысының салмақтары 40 кг., 50 кг. немесе 60 кг. болатын бірнеше бала қайықпен өзеннің арғы бетіне өту үшін өткелге келді. Егер әр салмақ түрінен кем дегенде екі бала болса, өзеннің арғы бетіне барлық бала өту үшін қайықтың жүккөтергіштігі кемінде қанша килограмм болуы керек?

Жауабы: 80 кг.

Шешуі:

1) Қайықтың жүккөтергіштігі 80 кг-нан аз болмауы керек, олай болмаған жағдайда өзеннің арғы бетіне екі бала ешқашан өте алмайды, әрі қалғандары өту үшін қайықты бергі бетке қайта алып келетін де ешкім болмай қалады.

2) Жүккөтергіштігі 80 кг. қайықпен алдымен 40 килограммдық екі бала өзеннің арғы бетіне өтіп, біреуі арғы бетте қалып, екіншісі қайықты бергі бетке алып келеді. Содан кейін бергі беттегі кез-келген бала қайықпен өзеннің арғы бетіне өтіп, арғы беттегі 40 килограммдық бала қайықты бергі бетке алып келеді. Осыдан кейін 40 килограммдық екі бала өзеннің арғы бетіне тағы да өтіп, біреуі арғы бетте қалып, екіншісі қайықты бергі бетке алып келеді де өзеннің бергі бетіндегі кез-келген бала қайықпен өзеннің арғы бетіне өтіп, арғы беттегі 40 килограммдық бала қайықты бергі бетке алып келеді. Соңында бергі бетте 40 килограммдық 2 бала ғана қалғанша, осылай жалғастыра беріп, балалар қайықпен арғы бетке өтеді.

3. Жасырын нысанға кіру үшін қосындысы 2123-ке тең болатын он үш натурал саннан тұратын құпия санды енгізу керек. Барлаушы құпия санның бірінен кейін бірі тізбектеліп қатар тұрған он бес натурал сандардың ішінен кез-келген екеуін сызып тастағаннан кейінгі қалған сандар екендігін біліп алды. Барлаушы құпия санның біреуін басуға 3 секундтан артық емес уақыт жібереді. Егер құпия сан қате енгізілген болса, сол уақыттан бастап 50 секунд ішінде дұрыс құпия сан енгізілмесе қауіпсіздік жүйесі іске қосылып, есік бекітіліп қалады. Жасырын нысанға барлаушы кіріп үлгере ме?

Жауабы: үлгереді (барлаушыға құпия санды енгізудің 17 түрлі нұсқасы беріледі). Қате енгізілген құпия саннан кейін 48 секундтан аспайтын уақытта дұрыс құпия санды енгізіп үлгереді. $16 \cdot 3 = 48$ секунд

Шешуі: Тізбектеле қатар орналасқан 15 натурал санның ең кішісін x деп аламыз. Онда ол сандар:

$$x, x + 1, x + 2, \dots, x + 14 - \text{ке тең}$$

Қосындысы:

$$\begin{aligned} & x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 14) = \\ & = 15x + (1 + 2 + \dots + 14) = 15x + 15 \cdot 7 = 15x + 105. \end{aligned}$$

$x + a, x + b$, сандары өшірілді деп алайық, мұндағы a және b сандары 0-ден 14-ке дейінгі бүтін сандар, әрі $a < b$.

$$15x + 105 = 2123 + (x + a) + (x + b) \Leftrightarrow$$

$$13x = 2018 + (a + b).$$

Соңғы теңдеудің шешімі болуы үшін теңдеудің оң жақ бөлігі 13-ке бөлінуі керек.

$1 \leq a + b \leq 27$ екендігін байқаймыз, сондықтан $2019 \leq 2018 + (a + b) \leq 2045$. Ал 2019-дан 2045-ке дейінгі натурал сандардың арасында тек 2028 және 2041 саны ғана 13-ке бөлінеді.

1) $2018 + (a + b) = 2028$ болсын деп алайық. Онда

$$13x = 2028 \Leftrightarrow x = 156 \quad \text{және} \quad a + b = 10.$$

Олай болса, ізделінді сандар:

$$156, 157, 158, \dots, 170.$$

Осы жағдайда екі санды өшірудің 5 түрлі тәсілі бар:

А) 156 және 166, егер $a = 0, b = 10$ болғанда

Б) 157 және 165, егер $a = 1, b = 9$ болғанда

В) 158 және 164, егер $a = 2, b = 8$ болғанда

Г) 159 және 163, егер $a = 3, b = 7$ болғанда

Д) 160 және 162, егер $a = 4, b = 6$ болғанда.

2) Енді $2018 + (a + b) = 2041$ болсын деп алайық. Онда

$$13x = 2041 \Leftrightarrow x = 157 \quad \text{және} \quad a + b = 23.$$

Олай болса, ізделінді сандар:

$$157, 157, 158, \dots, 171.$$

Осы жағдайда екі санды өшірудің 12 түрлі тәсілі бар:

А) 156 және 179, егер $a = 0, b = 23$ болғанда

Б) 157 және 178, егер $a = 1, b = 22$ болғанда

В) 158 және 177, егер $a = 2, b = 21$ болғанда

Г) 159 және 176, егер $a = 3, b = 20$ болғанда

Д) 160 және 175, егер $a = 4, b = 19$ болғанда

Е) 161 және 174, егер $a = 5, b = 18$ болғанда

Ж) 162 және 173, егер $a = 6, b = 17$ болғанда

З) 163 және 172, егер $a = 7, b = 16$ болғанда

И) 164 және 171, егер $a = 8, b = 15$ болғанда

К) 165 және 170, егер $a = 9, b = 14$ болғанда

Л) 166 және 169, егер $a = 10, b = 13$ болғанда

М) 167 және 168, егер $a = 11, b = 12$ болғанда.

Сонымен, 15 тізбектеле қатар орналасқан натурал сандардың тобын 2 тәсілмен таңдап алуға болады. Осы тәсілдердің біреуі үшін қалған сандардың қосындысы 2018 болатын

екі санды өшірудің 5 түрлі нұсқасы, екіншісі үшін екі санды өшірудің 12 түрлі нұсқасы бар. Қорыта айтсақ, құпия санның әртүрлі 17 нұсқасы бар. Егер алғашқы құпия сан қате терілсе, қалған 16 нұсқасын теруге мүмкіндігі бар. $16 \cdot 3 = 48$ секунд.

4. A , B және C қалалары жолдармен байланысқан. Әр екі қаланың арасында үштен аз емес, оннан артық емес (үшінші қала арқылы өтпейтін) жолдар бар. Географиялық қоғамның есептеуінше A – дан C -ға жетудің (тура бару немесе B арқылы бару) 33 тәсілі бар. Ал B -дан A -ға жетудің (тура бару немесе C арқылы бару) 23 тәсілі бар. C -дан B -ға жетудің (A -ға соғып кетуге де болады) неше тәсілі бар?

Жауабы: 21.

Шешуі: A және B қалаларын x жол, B және C қалаларын – y жол, A және C қалаларын – z жол ($3 \leq x, y, z \leq 10$) байланыстырсын.

Онда A -дан C – ға $z + xy$ тәсілмен, B -дан A – ға $x + yz$ тәсілмен баруға болады. Есептің шарты бойынша теңдеулер аламыз:

$$z + xy = 33, \quad x + yz = 23.$$

1) $x = 3$ болса, онда $yz = 20$. Бұдан $y = 4, z = 5$ немесе $y = 5, z = 4$. Бұдан $z + xy = 5 + 3 \cdot 4 = 17$ немесе $z + xy = 4 + 3 \cdot 5 = 19$, есептің шартына қарама-қайшы.

2) $x = 4$ болса, онда $yz = 19$, онда $3 \leq y, z \leq 10$ болуы мүмкін емес.

3) $x = 5$ болса, онда $yz = 18$. Сондықтан, $y = 3, z = 6$ немесе $y = 6, z = 3$. Бұдан $z + xy = 6 + 5 \cdot 3 = 21$ немесе $z + xy = 3 + 5 \cdot 6 = 33$.

Олай болса, $x = 5, y = 6$ және $z = 3$.

4) $x = 6$ болса, онда $yz = 17$. Мүмкін емес.

5) $x = 7$ болса, онда $yz = 16$. Бұдан $y = 4, z = 4$. Осыдан, $z + xy = 4 + 7 \cdot 4 = 32 \neq 33$.

6) $x = 8$ болса, онда $yz = 15$. Яғни, $y = 3, z = 5$ немесе $y = 5, z = 3$. Сонымен, $z + xy = 5 + 8 \cdot 3 = 29 \neq 33$ немесе $z + xy = 3 + 8 \cdot 5 = 43 \neq 33$.

7) $x = 9$ болса, онда $xy = 14$, бірақ 14 саны 3-тен аз емес, 10-нан көп емес екі санның көбейтіндісі түрінде жазылмайды.

8) $x = 10$ болса, онда $xy = 13$, мүмкін емес.

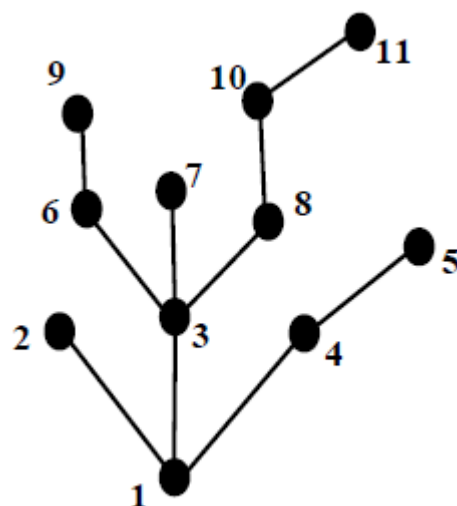
Сонымен, $x = 5, y = 6$ және $z = 3$. Бұл жағдайда C -дан B – ға $y + zx = 6 + 5 \cdot 3 = 21$ тәсілмен баруға болады.

Теңдеулерді құрусыз барлық жағдайда таңдау жасау арқылы шешімді табуға болады.

5. Урап планетасында тұрғындардың тегінің (фамилиясының) орнына әкелерінің аты қолданылады. Аспан денелерін зерттеуші Робин Бобин 11 ураптық туысқан ер-азаматтардың аты-жөнін алфавиттік ретпен жазып алды:

Ак Ос, Ак Па, Ак Ран, Ак Тун,
Ос Тун, Па Ак, Па Тун, РанТун,
Тун Ак, Тун Ос, Тун Па.

Ол шежіре ағашын салып кімнің кімнен тарайтынын жазып қоймақшы еді, бірақ кім-кімнің әкесі, атасы екендігін ұмытып қалды. Егер ең үлкенінің аты Па Тун болса, Робин Бобинге шежіре ағашын салуға көмектесіңдер. (барлық нұсқаларын тауып, басқа жауап нұсқаларының жоқ екендігін дәлелдеңдер)
Ескерту: суретте көрсетілген нөмірлер тізімге сәйкес



емес.

Жауабы:

№	1-нұсқа	2-нұсқа
1.	Па Тун	Па Тун
2.	Тун Па	Тун Па
3.	Тун Ак	Тун Ак
4.	Тун Ос	Тун Ос
5.	Ос Тун	Ос Тун
6.	Ак Ран	Ак Ран
7.	Ак Ос	Ак Тун
8.	Ак Па	Ак Па
9.	Ран Тун	Ран Тун
10.	Па Ак	Па Ак
11.	Ак Тун	Ак Ос

Шешуі:

1) 1-інші Ураптық - Па Тун болғандықтан, оның 1,2,3 ұлдары – Тун Ак, Тун Па және Тун Ос. (реттік нөмірі әзірге белгісіз).

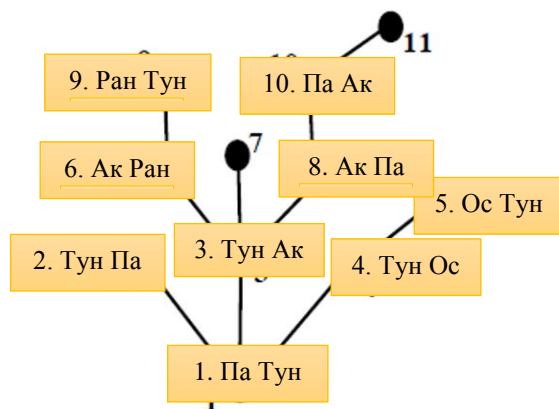
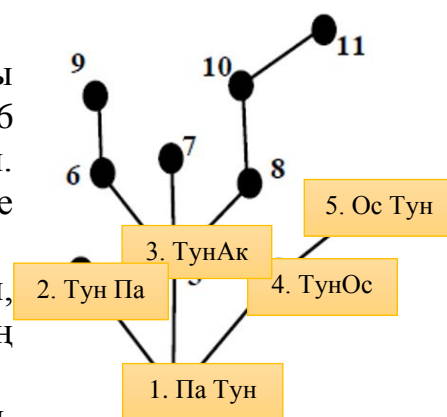
3-іншісінің үш ұлы бар. Сондықтан, осы шартты тек Тун Ак қана қанатағаттандырады. Олай болса 3 – Тун Ак.

2) 2-іншісінің есімі Тун Па, 4-іншісі - Тун Ос, онда 5-іншісі - Ос Тун.

Тун Актың ұлдары: Ак Ос, Ак Па, Ак Ран, Ак Тун болуы мүмкін. Олар 6, 7 және 8 нөмірімен тұр. Ак Ос пен Ак Тун 6 және 8 нөмері бола алмайды, ұрпақтары болмағандықтан. Олай болса, 6 мен 8 – Ак Па мен Ак Ран (реттік нөмірі әзірге белгісіз).

А) Егер 6 – Ак Па және 8 – Ак Ран болса, онда 10 – Ран Тун, бірақ онда 11-іншіге ешкім қалмай қалады Ран Тунның ұрпағы болмағандықтан.

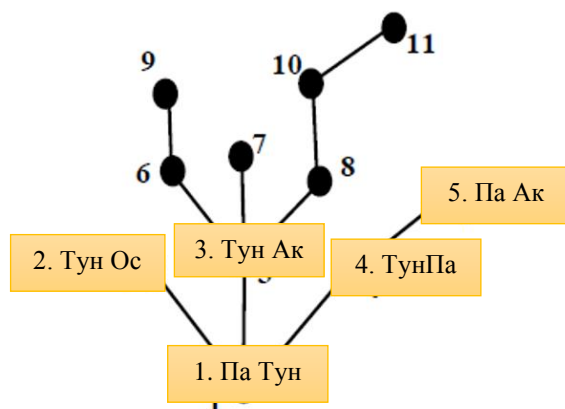
Б) Егер 6 – Ак Ран және 8 – Ак Па болса, онда 9 – Ран Тун, 10 – Па Ак, себебі Ран Тунда ұрпақ болмағандықтан.



Бұл жағдайда, 2 нұсқа болу мүмкін. Немесе 7 – Ак Ос, 11 – Ак Тун, немесе 7 – Ак Тун, 11 – Ак Ос.

3) 2-нші Тун Ос, 4-інші – Тун Па, 5 – Па Ак болсын.

Тун Ақтың ұлдары Ак Ос, Ак Па, Ак Ран, Ак Тун бола алады. Олардың нөмірлері 6, 7 және 8. Ак Па пен Ак Тунның нөмірлері 6 және 8 бола алмайды, өйткені оларда ұрпақ болмағандықтан. Олай болса, 6 және 8 – Ак Ос пен Ак Ран (реттік нөмірі әзірге белгісіз).



А) Егер 6 – Ак Ос, 8 – Ак Ран болса, онда 10 – Ран Тун. Бірақ онда 11-інші нөмір жоқ, себебі Ран Тунда ұрпақ болмағандықтан.

Б) Егер 6 – Ак Ран және 8 – Ак Ос, болса, онда 10 – Ос Тун. Бірақ онда 11-інші нөмір жоқ, себебі Ос Тунда ұрпақ жоқ.

Сонымен, 3-інші жағдай мүмкін емес.

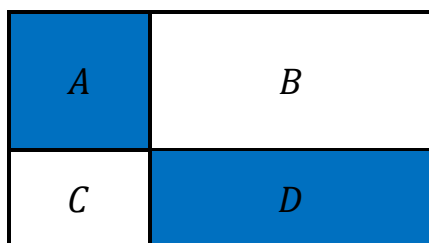
6. Тіктөртбұрыш екі тік және екі көлденең кесінділермен тоғыз тіктөртбұрышқа бөлінген. Кейбір бөліктердің аудандары суретте көрсетілген. Берілген үлкен тіктөртбұрыштың ауданын табыңыз.

30		
21	35	
	10	8

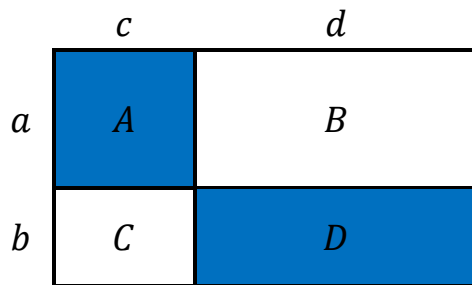
Жауабы: 228.

Шешуі:

1) Суретте көрсетілген көк тіктөртбұрыштардың аудандарының көбейтіндісі ақ тіктөртбұрыштардың аудандарының көбейтіндісіне тең екендігін дәлелдейік.



Тіктөртбұрыштардың қабырғаларын төменде көрсетілгендей белгілейік.



Онда A тіктөртбұрыштың ауданы ac , B – ad , C – bc , D тіктөртбұрыштың ауданы – bd – ға тең. Олай болса, көк тіктөртбұрыштардың аудандарының көбейтіндісі $ac \cdot bd = abcd$, ақ тіктөртбұрыштардың аудандарының көбейтіндісі. $ad \cdot bc = abcd$. Бұл көбейтінділер тең.

2) Тіктөртбұрыштың белгісіз аудандарын S_1 , S_2 , S_3 және S_4 (төмендегі суретке қараңыз) деп белгілейік.

30	S_1	S_2
21	35	S_3
S_4	10	8

Көк тіктөртбұрыштардың аудандарының көбейтіндісі ақ тіктөртбұрыштардың аудандарының көбейтіндісіне тең болғандықтан:

$$21 \cdot S_1 = 30 \cdot 35 \Leftrightarrow S_1 = 30 \cdot 35 : 21 = 50;$$

$$35 \cdot S_4 = 21 \cdot 10 \Leftrightarrow S_4 = 21 \cdot 10 : 35 = 6;$$

$$10 \cdot S_3 = 8 \cdot 35 \Leftrightarrow S_3 = 8 \cdot 35 : 10 = 28;$$

$$35 \cdot S_2 = S_1 \cdot S_3 = 50 \cdot 28 \Leftrightarrow S_2 = 50 \cdot 28 : 35 = 40.$$

3) Онда үлкен тіктөртбұрыштың ауданы басқа тіктөртбұрыштардың аудандарының қосындысына тең.

$$S = 30 + 50 + 40 + 21 + 35 + 28 + 6 + 10 + 8 = 228.$$