4сыныпқа арналған «Математикалық бәйге»

1. Тау Кит шоқжұлдызындағы Урап планетасында бір жыл 17 ай және жылдың соңындағы қосымша «мерекелік» үш күннен тұрады. Бір ай 13 күннен тұрады. Бұл планетадағы әрбір үшінші жыл «минорлы» (бұл жылдағы үшінші ай 12 күннен тұрады), ал әрбір бесінші жыл «мажорлы» (бұл жылдағы он бірінші ай 14 күннен тұрады). Егер жыл бір уақытта мажорлы да минорлы да болса, онда ол жыл «ерекше» деп аталады, яғни бұл жылдағы «мерекелік» күндердің саны 5 күнге дейін артады. Әр апта алты күннен тұрады: Айлы, Көлді, Таулы,Урапты Серуенді және Орманды күн. Урап планетасының тұрғыны – Дурап Урапты күні, «ерекше» жылдың төртінші айының бірінші күні дүниеге келген. Дурап 19 жасқа толғандағы туған күнін аптаның қай күнінде тойлайды?

Жауабы: Көлді

Шешуі:

Жай жылдары барлық айларда 13-күннен болады. Яғни 1 жылда $17 \times 13 + 3 = 224$ күн бар.

Минорлы жылда бір ай 1 күнге қысқа. Яғни бір жылда 223 күн бар.

Мажорлы жылда бір ай 1 күнге ұзағырақ. Яғни бір жылда 225 күн бар.

Ерекше жылда бір ай 1 күнге қысқа, бір ай 1 күнге ұзағырақ, және мерекелік күндердің саны 2 күнге артты (3тің орнына 5). Барлығы 226 күн.

Дураптың өмір сүрген жылдарындағы күндер санының кестесін келтіреміз.

	Күндер саны	Ескерту
Туғанжылы	$13 \times 13 + 14 + 5 = 188$	Ерекшежыл. Төртіншіайданонжетіншіайғадейін (13 жайай + 1 ұзақай + 5 мерекеліккүндер).
Туғанжылы + 1	224	Жайжыл
Туғанжылы + 2	224	Жайжыл
Туғанжылы + 3	223	Минорлыжыл -1
Туғанжылы + 4	224	Жайжыл
Туғанжылы + 5	225	Мажорлыжыл 0
Туғанжылы + 6	223	Минорлыжыл -1
Туғанжылы + 7	224	Жайжыл
Туғанжылы + 8	224	Жайжыл
Туғанжылы + 9	223	Минорлыжыл -2
Туғанжылы + 10	225	Мажорлыжыл -1
Туғанжылы + 11	224	Жайжыл
Туғанжылы + 12	223	Минорлыжыл -2
Туғанжылы + 13	224	Жайжыл
Туғанжылы + 14	224	Жайжыл
Туғанжылы + 15	226	Ерекшежыл 0
Туғанжылы + 16	224	Жайжыл
Туғанжылы + 17	224	Жайжыл
Туғанжылы + 18	223	Минорлыжыл -1
Туғанжылы + 19	$13 \times 3 = 39$	Жайжыл. Туғанкүнінедейінгіалғашқыүшай.
Барлыққүндер саны	4258	

Сонымен, Дураптың 19 жылішінде 4258 күнөтті.

4258-ті 6-ғабөлгенде 709, алқалдығы – 4, демек, 709×6=4254-шікүнідеурапты, келесі 4255-шікүні – серуенді, 4256-шікүні -орманды, 4257-шікүні – айлы, 4258-шікүнгетуракелетін 19-шытуғанкүнікөлдіболады.

2. Алты себетте алма, алмұрт және өрік бар. Әр себеттегі өріктің саны қалған себеттердің барлығындағы алмалардың санына тең, ал әр себеттегі алмалардың саны қалған себеттердің барлығындағы алмұрттардың санына тең. Барлық жемістердің саны 31-ге бөлінетіндігін дәлелдеңдер.

Дәлелдер.

Бір себеттегі алмұрттардың саны x болсын, онда барлық алмұрттардың саны $6x$, ал әр себеттегі алмалардың саны $5x$ болады. Олай болса барлық алмалардың саны $30x$. Сондықтан әр себеттегі өріктердің саны$5 \times 5x = 25x$, ал барлық себеттердегі өріктердің саны $6 \times 25x = 150x$.

Барлықалтысебеттегіжемістердің саны: $6x + 30x + 150x = 186x$.

186 саны 31-ге бөлінетіндіктен, $186x$ 31-ге бөлінеді.

3. Сырттай еш айырмашылығы жоқ алты бірдей тиын қатарға тізілген. Олардың араларында қатар орналаспаған екі жалған тиын бар. Детектор кез-келген үймеде қанша жалған тиын барын анықтай алады. Детекторды ең аз дегенде неше рет қолданып, ең болмаса бір жалған тиынды анықтауға болады?

Жауабы: 2 рет.

Шешуі.

Тиындарды 1, 2, 3, 4, 5 және 6 деп нөмірлейік.

(1) Детекторды бір рет қолданудың жеткіліксіз екендігін көрсетейік:

Тестілеудегітиындардың саны	Детектордыңеңболмасабіржалғантиындыанықтаумүмкінемесжағдайдағыкөрсеткіші.
1	0
2	0 немесе 1
3	1
4	2
5	Кезкелген

Детекторды тек бір рет қана қолданып ең болмағанда бір жалған тиынды қалай табуға болатындығын көрсетейік.

(2) Детекторды екі рет қолданып кем дегенде бір монетаны анықтауға болатынын көрсетейік. 1 және 2 тиындарды алып детекторда тексерейік. Олардың арасында екі жалған тиын болуы мүмкін емес.

А) Егер 1 және 2 тиындардың арасында жалған тиын болмаса, онда екі жалған тиын 3, 4, 5, 6-ның арасында.

3, 5, 6 тиындарын алып тексерейік. Олардың арасында ең болмағанда бір тиын жалған.

Егер 3, 5, 6 тиындарының арасында жалған тиын екеу болса, онда 3-тиын жалған, себебі 5 және 6 тиындар бір уақытта жалған бола алмайды. Егер олардың арасында тек бір тиын жалған болса, онда 4-тиын жалған болады.

Б) Егер 1 және 2 тиындар арасында тек бір ғана жалған тиын болса, онда 3, 4, 5, 6 тиындарының арасында бір ғана жалған тиын болады. 2, 3, 4, 5 және 6 тиындарын тексерейік. Егер олардың арасында тек бір жалған тиын болса, онда 1-тиын жалған болады; егер олардың арасында екі жалған тиын болса, онда 2-тиын жалған.

4. Көше бойындағы барлық үйлердің нөмірлері қатар тұрған екі таңбалы сандардан тұрады. Тұрғындардың барлығы «Ұлан» газетіне жазылған. Еріншек пошташы газеттерді тек барлық цифрлары тақ нөмірлі үйлерге ғана жеткізеді. Егер пошташы газеттерді 7 үйге жеткізген болса, ең аз дегенде қанша үй газетке жазылып,бірақ оны алмады.

Жауабы: 16.

Шешуі.

(1)Екі цифры да тақсанды ЖАҚСЫ, қалғандарын ЖАМАН деп алайық. Әр ондықта ЖАҚСЫ сандардың 5-тен артық еместігін байқаймыз. Олай болса пошташы аз дегенде екі әртүрлі ондықты алып келу керек. Бірақ, қатар тұрған ондықтарда ЖАҚСЫ сандар бола алмайды, себебі бірінші цифр екі рет қатарынан тақ бола алмайды.

(2) «жақсы» ондықта (бірінші цифры тақ) ЖАҚСЫ сандар біреуден кейін орналасады. Олай болса 7 ЖАҚСЫ нөмірге 7 ЖАМАН нөмір(солай бола тұра, біріншіні немесе соңғыны алмаса болады, сондықтан 6) және «жаман»ондықтан 10 ЖАМАН нөмір.

(3) Мысалы: 30-дан 53-ке дейін 7 ЖАҚСЫ және 16 ЖАМАН нөмірболады

5. Арман, Батыржан және Қайрат пейнтбол ойнап жатыр.Қайрат бірінші атты. Арман өзіне тиген әрбір бояуы бар шарға 5 бояуы бар шармен атып жауап қайтарды, ал Батыржан – 4, Қайрат – 3 бояуы бар шармен атып жауап қайтарды. Біраз уақыттан соң ойын аяқталды. Егер 14 бояуы бар шар ешкімге тимеген болса, балалар барлығы қанша рет бояуы бар шар атты?

Балалар өзін атпады және бір бояуы бар шардың екі адамға тиюі мүмкін емес.

Жауабы: 18 немесе 19.

Шешуі.

Арманға$-x$, Батыржанға – y ал Кайратқа – бояуы бар z шар тиген болсын. Онда барлығы$14 + x + y + z$ бояуы бар шар атылған. Арман бояуы бар шардың $5x$-ін атса, ал Батыржан $4y$ -ін, ал Кайрат бояуы бар шардан $3z + 1$ атты. Яғни, $5x + 4y + 3z + 1 = 14 + x + y + z,$

Немесе $4x + 3y + 2z = 13$.

x, y, z нольден артық (себебі: балалар шарлармен атысқандықтан) және y 2-ден артпайды, әрі y тақ болуы керек (әйтпесе солжақ 13-ке тең бола алмайды). Олай болса, $y = 1$ немесе $y = 3$

(1) Егер $y = 1$ болса, онда $4x + 2z = 10$, яғни $2x + z = 5$

Бұдан $x = 1$, $z = 3$ немесе $x = 2$, $z = 1$

Бірінші жағдайда барлық атыстың саны: $14 + x + y + z = 14 + 1 + 1 + 3 = 19$. Яғни 19 бояуы бар шар атылған.

Екінші жағдайда барлық атыстың саны: $14 + x + y + z = 14 + 2 + 1 + 1 = 18$. Яғни 18 бояуы бар шар атылған.

(2) Егер $y = 3$ болса, онда $4x + 2z = 4$, яғни $2x + z = 2$ мүмкін емес жағдай.

Сонымен балалар 18 немесе 19 бояуы бар шарларды атып, ойнаған.

А)Балалардың 19 шарды атқандағы мысалды көрсетейік

Кім атты	Кімге тиді	Ату саны
Қайрат	Арман – 1	1
Арман	Қайрат – 3 Тимеген– 2	5
Қайрат	Батыржан – 1 Тимеген– 8	$9= 3 \cdot 3$
Батыржан	Тимеген– 4	4
Барлығы	**19**	
Тимеген	**14**	

Б) Балалардың 18 шарды атқандағы мысалды көрсетейік.

Кіматты	Кімгетиді	Ату саны
Қайрат	Батыржан – 1	1
Батыржан	Арман – 2 Тимеген– 2	4
Арман	Қайрат – 1 Тимеген– 9	$10 = 5 \cdot 2$
Қайрат	Тимеген– 3	3
Барлығы	**18**	
Тимеген	**14**	

6. Қорапта 14 қызыл-көк, 23 көк-жасылжәне 17 жасыл-қызылкубиктержатыр. Қораптанең аз дегендеқанша кубик алғанда 13 бірдейтүстікубиктершығады?

Жауабы: 19.

Шешуі.

(1) 18 кубик жеткіліксіз. Мысалы, егер 6 қызыл-көк, 6 көк-жасылжәне 6 жасыл-қызылкубиктердіалатынболсақ, ондабояуындабіртүсболатындай 13 кубик табылмайды.

(2) Есептіңшартыорындалуүшін 19 кубиктіалужеткіліктіекендігіндәлелдейік. Біздекубиктердің 3 түрі бар. 19 кубиктіңішінде кем дегендебірдейбоялған 7 кубик табылады (болмағанжағдайда 18 кубиктенартықемес). Айқындылықүшін 7 қызыл-көккубиктертабылдыдейік. Қалған 12 кубиктіңәрқайсысындақызылнемесекөктүс бар болатындықтанбояуындабіртүс (көкнемесеқызыл)болатындай кем дегенде 6 кубик табылады. Осы 6 кубиктерді 7 қызыл-көккубиктергеқосып, бояуындабіртүсболатын 13 кубиктіаламыз.

3 тур «Математическаябайга», 4 класс

1. На планете Урап, что в созвездии Тау Кита, один год длится 17 месяцев и трех дополнительных «праздничных» дней в конце года, каждый месяц состоит из 13 дней. Каждый третий год на этой планете «минорный» (в этот год третий месяц имеет всего 12 дней), а каждый пятый – «мажорный» (в этот год одиннадцатый месяц имеет 14 дней). Если год одновременно и минорный, и мажорный, то он называется «особым», в этот год количество «праздничных» дней увеличивается до 5 дней. Каждая неделя состоит из шести дней: Лунный, Солнечный, Земной, Ураповый, Прогулочный и Свободный день. Дурап, один из жителей планеты Урап, родился в Ураповый день, в первый день четвертого месяца «особого» года. В какой день недели он будет праздновать свое совершеннолетие, то есть день, когда ему исполнится19лет?

Ответ: солнечный.

Решение.

В обычные годы все месяцы имеют по 13 дней. Всего дней в году $17 \times 13 + 3 = 224$.

В минорный год один месяц укорочен на 1 день. Всего 223 дня в году.

В мажорный год один месяц более длинный (на 1 день длиннее). Всего 225 дней в году.

В особый год один месяц короче на 1 день, один месяц длиннее на 1 день, и количество праздничных дней увеличено на 2 дня (5 вместо 3). Всего 226 дней.

Приведём таблицу количества дней в годы жизни Дурапа.

	Количество дней	Примечание
Год рождения	$13 \cdot 13 + 14 + 5 = 188$	*Особый год*. От четвёртого до семнадцатого месяца (13обычных месяцев + 1 длинный месяц + 5 праздничных дней).
Год рождения + 1	224	Обычный год
Год рождения + 2	224	Обычный год
Год рождения + 3	223	Минорный год -1
Год рождения + 4	224	Обычный год
Год рождения + 5	225	Мажорный год 0
Год рождения + 6	223	Минорный год -1
Год рождения + 7	224	Обычный год
Год рождения + 8	224	Обычный год
Год рождения + 9	223	Минорный год -2
Год рождения + 10	225	Мажорный год -1
Год рождения + 11	224	Обычный год
Год рождения + 12	223	Минорный год -2
Год рождения + 13	224	Обычный год
Год рождения + 14	224	Обычный год
Год рождения + 15	226	*Особый год 0*
Год рождения + 16	224	Обычный год
Год рождения + 17	224	Обычный год
Год рождения + 18	223	Минорный год -1
Год рождения + 19	$13 \times 3 = 39$	Обычный год. Первые три месяца до дня рождения.
Всего дней	4258	

Таким образом, за 19 лет жизни Дурапа прошло 4258 дней.

4258 при делении на 6 в частном даёт 709, а в остатке – 4, значит, 709×6 =4254-й день тоже ураповый, следующий за ним 4255-й день – прогулочный, 4256-й день - свободный, 4257-й день – лунный, 4258-й день, на который приходится 19-й день рождения, будет солнечным.

2. В шести корзинах лежат груши, сливы и яблоки. Число слив в каждой корзине равно числу яблок в остальных корзинах вместе взятых, а число яблок в каждой корзине равно числу груш в остальных корзинах вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

Доказательство.

Пусть число груш равно в одной корзине равно x , тогда общее количество груш равно $6x$, а количество яблок в каждой корзине равно $5x$. Значит, всего яблок $30x$. Поэтому количество слив в каждой корзине равно $5 \times 5x = 25x$, а всего слив во всех корзинах равно $6 \times 25x = 150x$.

Общее количество фруктов в шести корзина равно $6x + 30x + 150x = 186x$.
Так как 186 делится на 31, то и $186x$ делится на 31.

3. Шесть внешне одинаковых монет выложены в ряд. Среди них есть две фальшивые монеты, которые не лежат рядом. Детектор позволяет определить, сколько фальшивых монет содержится в любом данном наборе. Какое минимальное количество раз нужно использовать детектор, чтобы обнаружить хотя бы одну из фальшивых монет?

Ответ: 2 раза.

Решение.

Занумеруем эти монеты числами 1, 2, 3, 4, 5 и 6.
(1) Одного теста недостаточно. Контрпримеры приведены в таблице ниже.

Количество монет при тестировании	Показание детектора, при котором невозможно определить хотя бы одну фальшивую монету.
1	0
2	0 или 1
3	1
4	2
5	Любое

(2) Покажем, как, используя детектор два раза, можно определить по меньшей мере одну монету. Возьмём монеты 1 и 2 и протестируем их на детекторе. Среди них не может быть двух фальшивых.
(А) Если среди монет 1 и 2 нет фальшивых, то две фальшивые монеты находятся в наборе 3, 4, 5, 6. Возьмём монеты 3, 5, 6 и протестируем их. Среди них минимум 1 монета фальшивая.
Если среди монет 3, 5, 6 две монеты фальшивые, то монета 3 фальшивая, так как монеты 5 и 6 не могут быть одновременно фальшивыми. Если среди них только одна фальшивая, то фальшивой будет монета 4.
(Б) Если среди монет 1 и 2 только одна фальшивая, то среди монет 3, 4, 5, 6 находится ровно одна фальшивая. Протестируем монеты 2, 3, 4, 5 и 6. Если среди них только одна фальшивая, значит монета 1 фальшивая; если среди них две фальшивых, то монета 2 фальшивая.

4. На улице все дома имеют двузначные номера, идущие подряд, а все жители выписали газету «Всё в дом». Ленивый почтальон доставляет газету только в те дома, у которых все цифры номера нечетные. Почтальон доставил газеты в 7 домов. Какое минимальное число домов выписали газету, но не получили её?

Ответ: 16.

Решение.

(1) Назовем число с двумя нечетными цифрами ХОРОШИМ, остальные – ПЛОХИМИ.Заметим, что в каждом десятке ХОРОШИХ чисел не больше 5. Следовательно, почтальон должен захватить минимум два разных десятка. Но два подряд десятка с ХОРОШИМИ числами не могут идти, так как первая цифра два раза подряд нечетной быть не может.
(2) В «хорошем» десятке (первая цифра нечетная) ХОРОШИЕ числа идут через один. Итого на 7 ХОРОШИХ, будет 7 ПЛОХИХномеров (но при этом либо первый, либо последний можно не брать, поэтому 6) и 10 ПЛОХИХ номеров из «плохого» десятка.
(3) Пример: от 30 до 53 идет 7 ХОРОШИХ и 16 ПЛОХИХ номеров.

5. Арман, Батыржан и Карат играют в пейнтбол. Кайратвыстрелил первым. Затем в ответ на каждый попавший в него шарик с краскойАрман делал 5 выстрелов, Бахытжан – 4, а Кайрат – 3. Через некоторое время игра закончилась. Сколько в общей сложности выстрелов могли произвести ребята, если мимо цели пролетели 14шариков с краской?
   В себя ребята не стреляли и один шарик с краской не может попасть в двоих.

Ответ: 18 или 19.

Решение.

Пусть в Армана попало x, в Батыржана – y, а в Кайрата – zшариков с краской. Тогда всего было сделано $14 + x + y + z$ выстрелов. С другой стороны, Арман сделал$5x$ выстрелов, Батыржан – $4y$, а Кайрат – $3z + 1$. Таким образом, получаем уравнение$5x + 4y + 3z + 1 = 14 + x + y + z,$

$$\text{или } 4x + 3y + 2z = 13.$$

Заметим, что x, y, zбольше нуля (так как ребята производили выстрелы), иy не превосходит 4, при этом y должен быть нечётным (иначе левая часть не может быть равна 11). Значит, $y = 1$ или $y = 3$.
(1) Если $y = 1$, то $4x + 2z = 10$,

$$\text{или} 2x + z = 5.$$

Отсюда, $x = 1, z = 3$ или $x = 2, z = 1$.
В первом случае общее количество выстрелов равно $14 + 1 + 1 + 3 = 19$.
Во втором случае общее количество выстрелов равно $14 + 2 + 1 + 3 = 18$.
(2) Если $y = 3$, то $4x + 2z = 4$,или $2x + z = 3$,что невозможно для целых положительных x и y.
Таким образом, в общей сложности ребята произвели 18 или 19 выстрелов.

А) Приведём пример, когда ребята произвели ровно 19 выстрелов.

Кто стреляет	В кого попал	Количество выстрелов
Кайрат	Арман– 1	1
Арман	Кайрат – 3 Мимо – 2	5
Кайрат	Батыржан – 1 Мимо – 8	$9 = 3 \cdot 3$
Батыржан	Мимо – 4	4
Всего	**19**	
Мимо	**14**	

Б) Пример, когда ребята произвели ровно 18 выстрелов.

Кто стреляет	В кого попал	Количество выстрелов
Кайрат	Батыржан– 1	1
Батыржан	Арман – 2 Мимо – 2	4
Арман	Кайрат – 1 Мимо – 9	$10 = 5 \cdot 2$
Кайрат	Мимо – 3	3
Всего	**18**	
Мимо	**14**	

6. В коробке лежит 14 красно-синих, 23 сине-зелёных и 17 зелено-красных кубиков. Какое наименьшее число кубиков необходимо вынуть, чтобы среди них гарантировано было хотя бы 13 кубиков, имеющих в окраске одинаковый цвет?

Ответ: 19.
Решение.
(1) 18 кубиков не хватит. Например, если вытащить 6 красно-синих, 6 сине-зелёных и 6 зелено-красных кубиков, то не найдётся 13 кубиков, в окраске которых присутствует один цвет.
(2) Докажем, что 19 кубиков достаточно вынуть, чтобы условие задачи выполнилось. У нас имеется три типа кубиков: красно-синие, сине-зелёные и зелено-красные. Среди 19 кубиков найдётся по меньшей мере 7 кубиков, окрашенных одинаково (в противном случае кубиков не более 18). Пусть для определённости нашлось 7 красно-синих кубиков. Так как в окраске каждого из оставшихся 12 кубиков присутствует красный или синий цвет, то найдётся по меньшей мере 6 кубиков, имеющих в окраске одинаковый цвет (синий или красный). Добавляя эти 6 кубиков к 7 красно-синим кубикам, получим 13 кубиков, в окраске которых присутствует один цвет.