3 сыныпқа арналған «Математикалық бәйге»

1. Балалар лагерінде 30 және 16 адамнан тұратын екі топ бар. Асханада алдымен бірінші топтың балаларының үстелдері одан кейін екінші топтың балаларының үстелдері тұрады. Асхананың әрбір үстеліне бір топтан бес немесе алты бала отыра алады. Асхана үшін қай үстелде қанша бала отыратындығы әрі қай топтан екендігі маңызды. Асханаға балаларды отырғызудың (асханадағылардың көзқарасымен) неше түрлі тәсілі бар?

Жауабы: 6.

Шешуі.

1) 30-ды бестіктердің қосындысы немесе алтылықтардың қосындысы түрінде алуға болатындықтан, бірінші топты отырғызудың 2 тәсілі бар.

2) 16–ны 6+5+5 түрінде алуға болатындықтан, кез-келген жағдай үшін де әйтеуір біреуінде алты адам отыратын үш үстелді 3 тәсілмен таңдаймыз.

3) Барлығы: $2 \cdot 3 = 6$.

2. Түзудің бойынан бірнеше нүктені белгілеген. Осыдан кейін әрбір екі көрші нүктелердің арасынан тағы бір нүктеден белгілеген. Осындай нүктелерді қойып «тығыздауды» тағы екі рет қайталаған (Барлығы үш рет). Нәтижесінде түзудің бойынан 113 нүкте белгіленген. Бастапқыда қанша нүкте белгіленген?

Жауабы: 15 нүкте.

Шешуі.

Тығыздалудан кейінгі нүктелердің саны оған дейінгі болған нүктелердің санына сол санды бірге кемітіп қосқанда шығады. Сондықтан тығыздалуға дейінгі нүктелердің санын табу үшін 1-ді қосып, 2-ге бөлеміз.

Соңынан бастап шығарсақ:

Соңғы тығыздалуға дейін $(113 + 1): 2 = 57$ нүкте болды.

Екіншіге дейін $(57 + 1): 2 = 29$ нүкте болды.

Бастапқыда – $(29 + 1): 2 = 15$ нүкте болған.

3. Екі бақташы ағаштарды үш күн отырғызған. Бірінші бақташы әрбір келесі күні алдыңғы күнгі отырғызған ағаштарынан екі есе көп ағаш отырғызады. Екінші бақташы әрбір келесі күні алдыңғы күнге қарағанда үш есе көп ағаш отырғызып отырған. Үш күндегі екі бақташының отырғызған ағаштарының саны бірдей болған. Олардың әрқайсысының 90 ағаштан кем емес ағаш отырғызғанын дәлелдеңдер.

Дәлелдеу.

Бірінші бақташы бірінші күні x ағаш отырғызса, екінші күні $2x$ ағаш, ал үшінші күні $4x$ ағаш, барлығы $7x$ ағаш отырғызған. Олай болса, бірінші бақташының отырғызған ағаштарының саны 7-ге еселік.

Екінші бақташы бірінші күні y ағаш отырғызса, екінші күні $3y$ ағаш, ал үшінші күні $9y$ ағаш, барлығы $13y$ ағаш отырғызған. Олай болса, екінші бақташының отырғызған ағаштарының саны 13-ке еселік.

Бақташылардың отырғызған ағаштарының саны бірдей болғандықтан, әр бақташының отырғызған ағаштарының саны 7-ге де, 13-ке де еселік, яғни $7 \cdot 13 = 91$-ге де еселік. Ал 91-ге бөлінетін ең кіші натурал сан – 91. Олай болса әрбір бақташы барлығы 91-ден кем емес ағаш, яғни 90-нан кем емес ағаш отырғызған.

Дәлелдеу керегі осы.

4. Сырттай еш айырмашылығы жоқ бес бірдей тиын қатарға тізілген. Олардың араларында қатар орналасқан екі жалған тиын бар. Детектор кез-келген үймеде қанша жалған тиын барын анықтай алады. Детекторды ең аз дегенде неше рет қолданып, ең болмаса бір жалған тиынды анықтауға болады?

Жауабы: 1 рет.

Шешуі.

Тиындарды 1, 2, 3, 4, 5 деп нөмірлейік. Детекторды тек бір рет қана қолданып ең болмағанда бір жалған тиынды қалай табуға болатындығын көрсетейік.

4 және 5- тиындарды таңдап алайық. Олардың арасында қанша жалған тиын бар екендігін анықтайық.

А) Егер олардың арасында жалған тиын екеу болса, онда жалған тиындар 4 және 5 болады,

Б) Егер олардың арасында жалған тиын біреу болса, онда жалған тиындар 3 және 4.
С)Егер нөл болса, онда жалған тиындар 1 және 2, немесе 3 және 2 Кез-келген жағдайда 2–жалған тиын.

5. Жүк тасушы 12 кішкентай және 11 үлкен қораптарды жәшіктерге орналастырмақшы болады. Барлық кішкентай қораптар өзара бірдей және барлық үлкен қораптар өзара бірдей. Жәшікке 4 кішкентай және 1 үлкен қорапты салса болады немесе 3 үлкен және 1 кішкентай қорапты салса болады. Жүк тасушыға ең аз дегенде қанша жәшік қажет? Жәшіктерде бос орын қала алады.Үлкен қораптың орнына кішкентай қорапты салуға болады.

Жауабы: 6.

Шешуі.

Барлығы 23 қорап. Жәшіктерге 4 қораптан немесе 5 қораптан салынатындықтан 4 жәшік жетпейді. 5 жәшік жетеді деп алайық. Егер үлкен қораптарды 3+3+1+1+1 = 9 деп алсақ, бұл аз болады. Олай болса 3+3+3+1+1 = 11 деп қана алу керекпіз, бірақ онда кішкентай қораптарды тек 1+1+1+4+4=11 деп салу керек боламыз, тағы да аз болып қалады.
6 жәшіктің мысалы кестеде көрсетілген.

	Үлкен қораптар саны	Кішкентай қораптар саны
1-жәшік	3	1
2-жәшік	3	1
3-жәшік	3	1
4-жәшік	1	4
5-жәшік	1	4
6-жәшік	–	1
Барлығы	11	12

6. Үш адам A, B, C төрт түсті шарларды санады. Олардың әрқайсысы екі түсті дұрыс ажырата алады, ал қалған екі түсті шатастырып алады.Бірі қызыл мен қоңырды, екіншісі қоңыр мен сарыны, үшіншісі сары мен жасылды шатастырады.Олардың санау нәтижелері кестеде көрсетілген. Әр түстен қанша шардан болған?

	Қызыл	Қоңыр	Сары	Жасыл
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

Жауабы: қызыл шар - 2, қоңыр шар - 4,сары шар - 8, жасыл шар - 9.

Шешуі.

1) Екі адам, бірі қызыл мен қоңырды, екіншісі қоңыр мен сарыны шатастырғанымен жасыл түсті шатастырмайды. Олай болса, олардың санаған жасыл түсті шарларының саны бірдей болуы керек. Сондықтан олар A және C, яғни жасыл шарлардың саны – 9.
2) Олай болса сары түс пен жасыл түсті шатастыратын B, әрі ол қызыл мен қоңыр түстерді шатастырмайды, яғни қызыл шарлардың саны – 2, ал қоңыр шарлардың саны – 4.
3) C-да қызыл шарлардың саны 2 емес, олай болса ол қызыл мен қоңыр түстерді шатастырады, ал сары түс пен жасыл түсті шатастырмайды. Сондықтан сары түсті шарлардың саны – 8.

1. В детском лагере два отряда, в которых 30 и 16 человек. В столовой стоят сперва столы, за которыми сидят дети первого отряда, а потом столы, за которыми сидят дети второго отряда. За каждым столом может сидеть пять или шесть детей все из одного отряда. Столовой важно, сколько детей сидит за каким столом и из какого они отряда. Сколько существует различных (с точки зрения столовой) способов рассадки детей?

Ответ: 6.

Решение.

1) 30 можно представить либо в виде суммы пятерок, либо в виде суммы шестерок – итого 2 варианта рассадки первого отряда.

2) 16 можно представить как 6+5+5, то есть в любом случае три стола, один из которых – шестерка. Это дает три варианта.

3) Всего вариантов: $2 \times 3 = 6$.

2. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждым двумя соседними точками отметили ещё по точке. Такое «уплотнение» повторили ещё дважды (всего три раза). В результате на прямой отмечены 113 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

Ответ: 15 точек.

Решение.

После уплотнения добавляется на одну точку меньше, чем было до этого. Следовательно, количество точек до уплотнения можно найти так: прибавить 1 и разделить на 2.

Прокрутки весь процесс от конца к началу.

До последнего уплотнения было $(113 + 1): 2 = 57$ точек.

До второго – $(57 + 1): 2 = 29$ точек.

В самом начале – $(29 + 1): 2 = 15$ точек.

3. Два садовника сажали деревья три дня. Первый садовник каждый день сажал деревьев в два раза больше, чем в предыдущий день. Второй садовник сажал каждый день в три раза больше деревьев, чем в предыдущий день. Оказалось, что за три дня они посадили поровну деревьев. Докажите, что каждый из них высадил не меньше 90 деревьев.

Доказательство.

Пусть в первый день первый садовник выразил x деревьев, тогда во второй день он высадил $2x$ деревьев, а в третий день $4x$ деревьев. Всего он высадил $7x$ деревьев. Значит, общее количество деревьев, поражённых первым садовником, кратное 7.

Пусть второй садовник посадил y деревьев, тогда во второй день он посадил $3y$ деревьев, а в третий день $9y$ деревьев. Всего он посадил $13y$ деревьев. Значит, общее количество деревьев, высаженых вторым садовников кратное 13.

Так как садовники посадили поровну деревьев, то общее количество деревьев, поражённых каждым из садовников, кратное и 7, и 13, а, значит, кратно $7 \times 13 = 91$.

Минимальное натуральное число, которое делится на 91, это 91. Следовательно, каждый садовник в общей сложности посадил не менее 91 дерева, что, очевидно, не меньше 90.

Что и требовалось доказать.

4. Пять внешне одинаковых монет выложены в ряд. Среди них есть две фальшивые монеты, которые лежат рядом. Детектор позволяет определить, сколько фальшивых монет содержится в любом данном наборе. Какое минимальное количество раз нужно использовать детектор, чтобы обнаружить хотя бы одну из фальшивых монет?

Ответ: 1 раз.

Решение.

Выложенные в ряд монеты занумеруем числами 1, 2, 3, 4 и 5. Покажем, как, используя детектор только один раз, можно определить хотя бы одну фальшивую монету.

Возьмём монеты 4 и 5 и определим, сколько среди них фальшивых.

А) Если две, то монеты 4 и 5 фальшивые.

Б) Если только одна, то монеты 3 и 4 фальшивые.

С) Если ноль, то фальшивыми являются либо монеты 1 и 2, либо монеты 2 и 3. В любом случае монета 2 фальшивая.

5. Грузчик хочет упаковать 12 маленьких и 11 больших посылок в коробки. Все маленькие посылки одинаковы, большие – тоже. В коробки можно класть либо 4 маленьких и одну большую посылку, либо 3 больших и одну маленькую посылку. Какого наименьшего числа коробок хватит грузчику? В коробках могут оставаться пустые места. Вместо большой посылки можно паковать маленькую.

Ответ: 6.

Решение.

Всего 23 посылки, а в коробки кладут либо по 4, либо по 5 посылок, следовательно, 4 коробки точно не хватит.

Пусть хватило 5 коробок. Проверим, как уложились большие. Если взять 3+3+1+1+1 = 9, этого мало. Значит, надо обязательно взять 3+3+3+1+1 = 11, иначе никак. Но тогда маленьких посылок можно упаковать только 1+1+1+4+4=11, что слишком мало, так как по условию их 12.

Пример для 6 коробок приведён в таблице.

	Большие посылки	Маленькие посылки
1 коробка	3	1
2 коробка	3	1
3 коробка	3	1
4 коробка	1	4
5 коробка	1	4
6 коробка	–	1
Всего	11	12

6. Три человека A, B, C пересчитали кучу шариков четырех цветов. При этом каждый из них правильно различал какие-то два цвета, а два других мог путать: один путал красный и оранжевый, другой – оранжевый и желтый, а третий – желтый и зеленый. Результаты их подсчетов приведены в таблице. Сколько шариков каждого цвета было на самом деле?

	Красный	Оранжевый	Желтый	Зеленый
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

Ответ: красных – 2, оранжевых – 4, жёлтых – 8, зелёных – 9.

Решение.

1) Оба человека, один из которых путает красный и оранжевый, а другой – оранжевый и жёлтый, не путают зелёный цвет. Значит, количество зелёных шариков у них должно совпадать. Видим, что это люди A и C, и количество зелёных шариков равно 9.

2) Более того, отсюда следует, что человек B путает жёлтый и зелёный цвета. Следовательно, он не путает красный и оранжевый, то есть красных шариков – 2, оранжевых – 4.

3) У человека C количество красных не равно 2, значит, он путает оранжевый и красный цвета, а зелёный и жёлтый не путает. Поэтому жёлтых – 8.