

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ  
КАЗАХСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ



## АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА



**Методические рекомендации по оформлению и проверке  
письменных работ по алгебре и началам анализа на итоговой  
аттестации выпускников школ**

Астана 2017

## Предисловие

Это методическое пособие предназначено для подготовки к итоговой аттестации за курс средней школы.

В нем представлены варианты экзаменационных заданий и образец оформления письменной экзаменационной работы по алгебре и началам анализа, а так же варианты для самостоятельной подготовки. Все варианты содержат материал по алгебре и началам анализа, который изучается в 10-11 классах.

Каждый вариант содержит задания, проверяющие степень овладения учащимися вычислительными навыками, навыками тождественных преобразований основных типов алгебраических выражений, способами решения указанных в программе уравнений и неравенств. Учащиеся должны показать умение строить графики функций и проводить исследование функции методами математического анализа, решать задачи на вычисление площади криволинейной трапеции, на нахождение наибольших и наименьших значений.

При составлении письменной экзаменационной работы по алгебре и началам анализа учитывается профиль обучения (ЕМН, ОГН, углубленное изучение математики (РФМШ)).

Согласно требованиям к математической подготовке выпускников, каждый вариант содержит разноуровневые задания.

Уровень А обязательной подготовки. Задания этого уровня достаточно просты и рассчитаны на выполнение каждым выпускником, освоившим программу. Задания продвинутого уровня В и сложного уровня С определяют более высокое качество усвоения выпускником алгебры и начал анализа.

а) Для классов ЕМН предложены 6 заданий.

б) Для классов ОГН - 5 заданий.

в) Для классов с углубленным изучением математики (РФМШ) - 6 заданий.

## Требования к оформлению письменной экзаменационной работы

### 1) Образец оформления титульного листа

Письменная экзаменационная работа

по алгебре и началам анализа

за курс средней школы

ученика(цы) 11 класса«   »

Ф.И.О. (в родительном падеже).

Вариант   .

2) Экзаменационная работа выполняется на тетрадных листах со штампом школы. Название, номер школы, ее местоположение указаны на штампе. Здесь же указывается дата проведения экзамена. Листы складываются в виде тетради.

3) Условие задачи переписывается один раз. Специальная сокращенная запись условия не делается, это должно естественным образом войти в общее объяснение решения, после решения записывается ответ.

4) Рисунок выполняется ручкой, при построении графиков функций обязательно указываются точки пересечения с осями координат и критические точки функции.

5) В записи объяснений решения заданий следует избегать многословности, краткость и четкость должны сочетаться со строгостью рассуждений.

7) При решении также следует объяснять основные этапы и, если это необходимо, выполнять рисунки.

8) Работа должна быть выполнена аккуратно и разборчиво.

9) В конце решения должен быть обязательно ответ. В задачах на доказательство, исследование или построение – вывод.

10) Всякую новую мысль следует писать с красной строки.

- 11) Между номером задания, решением и ответом пропускается одна клетка вниз.
- 12) Недопустимо сокращение слов в рассуждениях.
- 13) На экзамене не разрешается пользоваться калькулятором, мобильным телефоном.

## Оценивание письменной экзаменационной работы

При выполнении письменной работы могут встретиться:

- ошибки;
- недочеты;
- мелкие недочеты.

### 1) Ошибки:

- незнание или неправильное применение свойств, правил, алгоритмов, существующих зависимостей, лежащих в основе выполнения задания или используемых в ходе его выполнения;
- неправильный выбор действий, операций;
- неверные вычисления в случае, когда цель задания - проверка вычислительных умений и навыков;
- пропуск части математических выкладок, действий, операций, существенно влияющих на получение правильного ответа;
- несоответствие пояснительного текста, ответа задания, наименования величин выполненным действиям и полученным результатам;
- потеря корня или сохранение постороннего корня, а также отбрасывание без объяснений одного из них;
- вычислительные ошибки, если они не являются опиской;
- логические ошибки.

## **2) Недочеты**

- не указаны единицы измерения;
- в записи ответа использованы сократимые или неправильные дроби и в окончательном ответе не избавились от иррациональности в знаменателе;
- отсутствие обоснования решения;
- неправильное списывание данных (чисел, знаков, обозначений, величин);
- ошибки в записях математических терминов, символов при оформлении математических выкладок;
- отсутствие ответа к заданию.

## **3) Мелкие недочеты**

- нерациональные приемы вычислений и преобразований;
- небрежное выполнение записей, рисунков, графиков, схем, диаграмм, таблиц, а также грамматические ошибки в написании математических терминов.

Оценка «5» ставится за безупречное выполнение всех заданий контрольной работы, допускается не более двух мелких недочетов.

Оценка «4» ставится, если одно задание не выполнено или выполнено с ошибкой.

Оценка «3» ставится, если выполнено правильно не менее трёх заданий и учащийся показал владение обязательными знаниями и умениями.

Оценка «2» ставится, если не выполнено больше половины заданий и учащийся не показал владение обязательными знаниями и умениями.

На работы, выполненные на «5» и на «2», пишется рецензия.

## Образец оформления экзаменационной контрольной работы

Место  
для  
штампа

Письменная экзаменационная работа  
по алгебре и началам анализа  
за курс средней школы  
ученика(цы) 11 класса " "  
Ф.И.О (в родительном падеже).  
Вариант I (II).

1 Упростите выражение:

$$\sqrt[3]{2a\sqrt[4]{\frac{1}{a}} - \frac{a\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2a\sqrt[4]{\frac{1}{a}} - \frac{a\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}} &= (2a \cdot a^{-\frac{1}{4}} (a \cdot a^{\frac{1}{4}}) : a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = \\ &= (2a^{1-\frac{1}{4}} a^{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (2a^{\frac{3}{4}} a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} = \\ &= a^{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt[4]{a}$ .

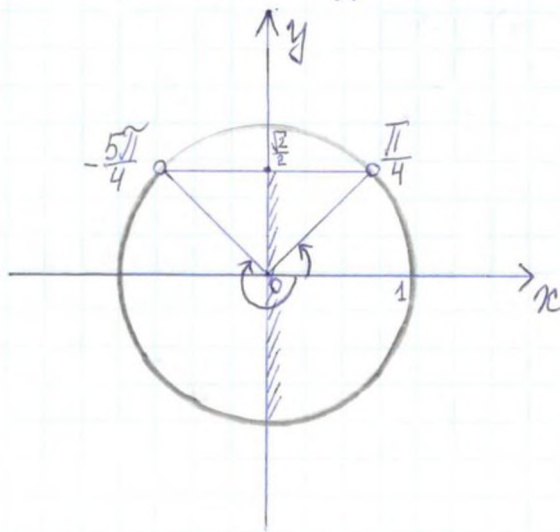
2 Решите неравенство:

$$-4 \sin\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) > -2\sqrt{2}$$

Решение:

$$-4 \sin\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) > -2\sqrt{2} \quad | \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$





$$\begin{cases}
 \lg(x^2 - y^2) - \lg(x + y) = 0 \\
 \lg(x^2 + \log_2(x^2 + y^2)) = 20
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x^2 - y^2 = x + y \\
 x^2 + \log_2(x^2 + y^2) = 20
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x^2 - y^2 > 0 \\
 x + y > 0 \\
 x^2 + y^2 > 0
 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}
 \lg(x^2 - y^2) - \lg(x + y) = 0 \\
 \lg(x^2 + \log_2(x^2 + y^2)) = 20
 \end{cases}$$

23) Решение неравенств:

Даны:  $x \in (-\frac{2\sqrt{n}}{3}, \frac{2\sqrt{n}}{3}), n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{5\sqrt{n}}{4} + 2\sqrt{n} < \frac{\sqrt{n}}{4} < \frac{\sqrt{n}}{3} + 2\sqrt{n}, n \in \mathbb{Z} \\
 & -\frac{5\sqrt{n}}{4} - \frac{\sqrt{n}}{4} + 2\sqrt{n} < \frac{\sqrt{n}}{3} < \frac{\sqrt{n}}{4} + 2\sqrt{n}, n \in \mathbb{Z} \\
 & -\frac{5\sqrt{n}}{4} + 2\sqrt{n} < \frac{\sqrt{n}}{3} < \frac{\sqrt{n}}{4} + 2\sqrt{n}, n \in \mathbb{Z} \\
 & -\frac{5\sqrt{n}}{4} + 2\sqrt{n} < \frac{\sqrt{n}}{4} < \frac{\sqrt{n}}{3} + 2\sqrt{n}, n \in \mathbb{Z} \\
 & -2\sqrt{n} + \frac{2\sqrt{n}}{3} < x < \frac{2\sqrt{n}}{3}, n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} ; \begin{cases} x = 1 + y & (1) \\ (1 + y)^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (2) системы:

$$(1 + y)^2 + y^2 = 5$$

$$1 + 2y + y^2 + y^2 = 5$$

$$2y^2 + 2y - 4 = 0$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

По теореме, обратной теореме Виета.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 \cdot y_2 = -2 \end{cases} \quad y_1 = -2, y_2 = 1$$

$$\text{если } y_1 = -2, \text{ то } x_1 = 1 + (-2) = -1$$

$$\text{если } y_2 = 1, \text{ то } x_2 = 1 + 1 = 2$$

$$(-1; -2) \notin \text{ОДЗ}, \text{ так как } -1 + (-2) < 0.$$

$(2; 1)$  является решением системы уравнений, так как удовлетворяет всем условиям ОДЗ.

Ответ:  $(2; 1)$ .

~ 4. Вычислите:  $\int_0^1 \frac{9-4x^2+\sqrt{3-2x}}{3-2x} dx$

Решение

$$\int_0^1 \frac{9-4x^2+\sqrt{3-2x}}{3-2x} dx = \int_0^1 \left( \frac{(3-2x)(3+2x)}{3-2x} + \frac{\sqrt{3-2x}}{3-2x} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left( 3+2x + \frac{1}{\sqrt{3-2x}} \right) dx = \left( 3x + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \sqrt{3-2x} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= (3 \cdot 1 + 1^2 - \sqrt{3-2 \cdot 1}) - (3 \cdot 0 + 0^2 - \sqrt{3-2 \cdot 0}) = 3 + 1 - 1 + \sqrt{3} =$$

$$= 3 + \sqrt{3}$$

Ответ:  $3 + \sqrt{3}$ .

~ 5. Представьте число 12 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была максимальной:

Решение:

Пусть  $x$  - одно слагаемое, тогда  $(12-x)$  - другое слагаемое.

По условию задачи составим функцию

$$f(x) = x^2 + (12-x)^2$$

$$f(x) = x^2 + 144 - 24x + x^2$$

$$f(x) = 2x^2 - 24x + 144.$$

Исследуем функцию на наименьшее значение с помощью производной.

$$f'(x) = 4x - 24.$$

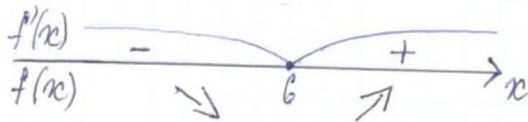
Найдем критические точки функции, для этого решим уравнение  $f'(x) = 0$

$$4x - 24 = 0$$

$$4x = 24$$

$$x = 6.$$

Определим знак производной



$x_{\min} = 6 \Rightarrow f(6)$  - наименьшее значение функции.

$$x = 6 \Rightarrow 12 - x = 12 - 6 = 6.$$

Значит, одно слагаемое равно 6, а другое слагаемое тоже равно 6.

$$\text{Ответ: } 12 = 6 + 6.$$

26. Исследуйте функцию и постройте график:

$$f(x) = x^2(x-2)^2.$$

Решение:

$$f(x) = x^2(x-2)^2$$

1.  $D(y) = \mathbb{R}$ ;  $E(y) = [0; +\infty)$

2. Чётность, нечётность функции.

$$f(-x) = (-x)^2(-x-2)^2 = x^2(x+2)^2$$

$f(-x) \neq f(x)$ ,  $f(-x) \neq -f(x)$ , следовательно данная функция общего вида.

3. Точки пересечения с осями координат.

с  $Ox$ :  $y=0 \Rightarrow x^2(x-2)^2=0$

$$\begin{cases} x^2=0 \\ (x-2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$O(0;0), A(2;0)$$

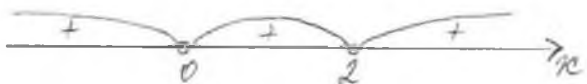
с  $Oy$ :  $x=0 \Rightarrow y = 0^2 \cdot (0-2)^2 = 0 \cdot 4 = 0$

$$O(0;0)$$

4. Траектории знаков постоянства.

$$f(x) > 0, \\ x^2(x-2)^2 > 0$$

$$f(x) < 0, \\ x^2(x-2)^2 < 0$$



$f(x) > 0$  при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

5. Найдем производную функции.

$$f'(x) = 2x(x-2)^2 + x^2 \cdot 2(x-2) = 2x(x-2)(x-2+x) = \\ = 2x(x-2)(2x-2) = 4x(x-2)(x-1).$$

6. Найдем критические точки функции.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x-2)(x-1) = 0 \\ x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1.$$

7. Найдем промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

Для этого решим неравенства:

$$4x(x-2)(x-1) \geq 0 \text{ и } 4x(x-2)(x-1) \leq 0.$$



$f(x)$  возрастает при  $x \in [0; 1] \cup [2; +\infty)$

$f(x)$  убывает при  $x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2]$

$$x_{\min} = 0, y_{\min} = y(0) = 0^2 \cdot (0-2)^2 = 0$$

$$x_{\min} = 2, y_{\min} = y(2) = 2^2 \cdot (2-2)^2 = 0$$

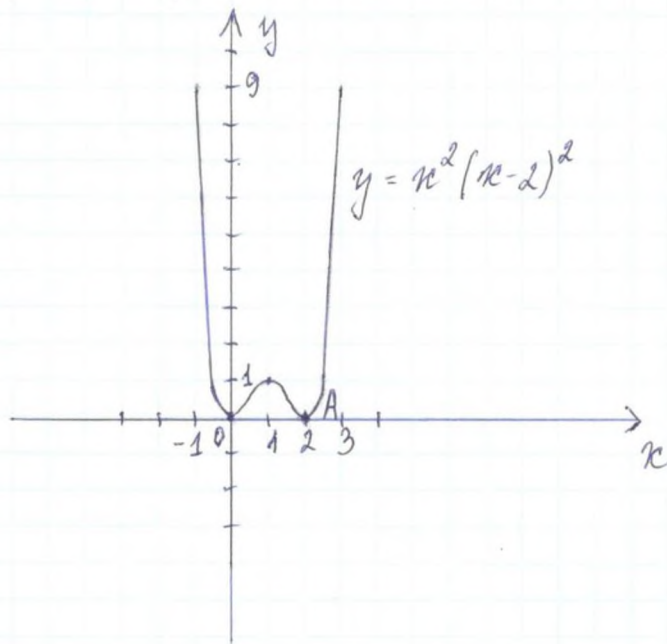
$$x_{\max} = 1, y_{\max} = y(1) = 1^2 \cdot (1-2)^2 = 1.$$

8. Дополнительные точки

$$y = f(3) = 3^2 \cdot (3-2)^2 = 9 \cdot 1 = 9.$$

$$y = f(-1) = (-1)^2 \cdot (-1-2)^2 = 1 \cdot 9 = 9.$$

9. Строим график.



## Примерные контрольные работы для самостоятельного решения

### Общественно-гуманитарное направление

#### 1 - вариант

1. Вычислите:  $4^{2+\log_4 2}$

2. Упростите:  $\frac{n^2 - m^2}{(\sqrt{n} + \sqrt{m})^2 - 2\sqrt{mn}}$

3. Решите неравенство:  $2\cos 2x - 1 \geq 0$

4. Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} x + 5^{y+2} = 9 \\ 2x - 5^{y+3} = 11 \end{cases}$$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$y = 3 - 4x + x^2 \quad \text{и} \quad y = 3 - x^2.$$

#### 2 - вариант

1. Вычислите:  $\int_{-1}^1 \frac{8}{\sqrt{5+4x}} dx$

2. Упростите:  $b^{\sqrt{5}} \cdot b^{1,4} : \sqrt[4]{b^{4\sqrt{5}}}$

3. Решите уравнение:  $\sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 1$ .

4. Решите систему неравенств: 
$$\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ \log_6(x + 3) \geq 1 \end{cases}$$

5. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x + 10 \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 2$$



## Естественно-математическое направление

### 1- вариант

1. Найдите значение выражения:  $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}} - \sqrt{43 + 30\sqrt{2}}$
2. Если  $\log_7 3 = a$  и  $\log_7 2 = b$  то выразите  $\log_7 378$  через  $a$  и  $b$
3. Решите уравнение:  $6 \cos^2 x + \sin x - 5 = 0$
4. Решите систему неравенств: 
$$\begin{cases} \log_{2,1}(x^2 + 2x - 10) \geq \log_{2,1}(x + 2) \\ |x| < 7 \end{cases}$$
5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x) = 8 - x^3$  на отрезке  $[-1; 2]$
6. Найдите площадь плоской фигуры ограниченной графиком функции  $y = \sqrt{x+2} + 2$  и прямой, проходящих через точки с координатами  $(-2; 2)$ ;  $(2; 4)$

### 2 – вариант

1. Найдите значение выражения:  $\sqrt{28 + 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$
2. Если  $\log_7 3 = a$  и  $\log_7 2 = b$  то выразите  $\log_7 588$  через  $a$  и  $b$
3. Решите уравнение:  $6 \sin^2 x - \cos x - 5 = 0$
4. Решите систему неравенств: 
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{7}}(x^2 - 2x - 9) \leq \log_{\frac{1}{7}}(x + 1) \\ |x| \leq 6 \end{cases}$$
5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x) = x^3 - 1$  на отрезке  $[-2; 1]$
6. Найдите площадь плоской фигуры ограниченной графиком функции  $y = \sqrt{x+1} + 2$  и прямой, проходящих через точки с координатами  $(-1; 2)$ ;  $(0; 3)$

## Углубленное изучение математики

### 1 – вариант

1. Вычислите:  $3^{\log_1 0,04} + \log_{25}(3 + 2\sqrt{2}) - \log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{2} - 1)$

2. Упростить выражение:  $2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \frac{2\sin(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}(-\alpha)}$

3. Решите уравнение:  $4^{2x^2-3x+3} = 24 - 12 + 6 - 3 + \dots$

4. Решите неравенство:  $\log_x \frac{2x+5}{4x-4} < 0$

5. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна  $4\sqrt{3}$ . При какой высоте призмы объем её будет наибольшим?

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = x^2 - 4x + 4$  и касательными к этому графику, проходящими через начало координат.

## 2 – вариант

1. Вычислите:  $\left(\frac{1}{4}\right)^{9 \log_8 \frac{2-\sqrt{5}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4 \log_{2\sqrt[3]{2}}(5+3\sqrt{5})}$

2. Упростите выражение:  $\cos(-2\alpha) + \frac{2 \sin(\pi - 2\alpha)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$

3. Решите уравнение:  $3^{2x^2 - 5x + 6} = 18 + 6 + 2 + \frac{2}{3} + \dots$

4. Решите неравенство:  $\log_x \frac{3x+2}{4-4x} > 0$

5. Длина бокового ребра правильной четырёхугольной пирамиды равна  $4\sqrt{3}$ . Высота пирамиды может принимать только те значения, которые принадлежат отрезку  $[1;5]$ . Найдите наибольший объём пирамиды.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = x^2 + 6x + 9$  и касательными к этому графику, проходящими через начало координат.

## Содержание

<b>1. Предисловие</b>	<b>2</b>
<b>2. Требования к оформлению письменной экзаменационной работы</b>	<b>3</b>
<b>3. Оценивание письменной экзаменационной работы</b>	<b>5</b>
<b>4. Образец оформления экзаменационной контрольной работы</b>	<b>7</b>
<b>5. Примерные контрольные работы для самостоятельного решения</b>	<b>16</b>